Lukion pitkän matematiikan kurssi 12 – algoritmit

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Anni Laitinen, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri 12. MAA12 Algoritmit matematiikassa.** 165 s. Otava 2018. Hinta huhtikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 21,96 – 29,20 euroa.

Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 12. Algoritmit matematiikassa.** 180 s. Sanoma Pro 2018. Hinta huhtikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 22,83 – 29,55 euroa.

Lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelma sisältää kolme "valtakunnallista pakollista kurssia". Näistä toinen, kurssi numero 12, on nimeltään *Algoritmit matematiikassa*. Opetussunnitelma esittää tällekin kurssille tavoitteet. Ne ovat opiskelijan algoritmisen ajatelun syventäminen, kykeneminen algoritmien toiminnan tutkimiseen ja selittämiseen, iteroinnin käsitteen ymmärtäminen ja kyky ratkaista epälineaarisia yhtälöitä numeerisesti, kyky määrittää muutosnopeutta ja pinta-alaa numeerisesti ja kyky käyttää teknisiä apuvälineitä algoritmien tutkimisessa ja laskutoimituksissa. Näiden kurssin otsikkoon hyvin sopivien tavoitteiden joukkoon on sitten tullut algebran piiriin kuuluva asia, polynomien jaollisuus. Opetussuunnitelman listaamista neljästä keskeisestä sisällöstä kaksi onkin algebraa: polynomien jakoalgoritmi ja polynomien jakoyhtälö. Mikäpä siinä. Kun koulumatematiikka on muodostunut niin laskennolliseksi kuin se on muodostunut, niin melkein minkä tahansa osan voi sijoittaa yleisotsikon algoritmit alle. Toisaalta opetussuunnitelma mainitsee aikaisemmin sanan algoritmi vain kerran, kun se listaa Eukleideen algoritmin lukuteorian kurssin ainekseksi. Miten tällä kurssilla syventyvä algoritminen ajattelu on alkuaan synnytetty, siitä ei opetussuunnitelma kerro.

Molemmat tarkasteltavat oppikirjat aloittavat lyhyellä johdatuksella algoritmeihin ja siirtyvät sitten polynomien jaollisuuteen. Kumpikaan kirja ei kerro algoritmi-sanan historiasta: sanahan on väännös 800-luvun Bagdadissa vaikuttaneen *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmin* nimestä. Al Khwarizmi kirjoitti kymmenjärjestelmästä, intialaisista numeroista, joiden käyttö edellytti uusia menettelytapoja mm. yhteen- ja kertolaskussa. Keskiajalla vallitsi kiistoja laskulautaan luottaneiden abbakistien ja kymmenjärjestelmän käyttäjien, algoristien välillä. Alakoulun laskento on paljossa algoritmien opettelua.

Polynomien jaollisuuteen molemmat kirjat johdattavat esimerkkien kautta. *Tekijä* käyttää jakokulmaa, *Juuri* puhuu "allekkain jaosta", jossa jaettava, jakaja ja osamäärä näyttävät sijoittuvan melko lailla samoin kuin siinä jakokulman versioissa, joka tämän kirjoittajalle opetettiin 1950-luvulla. Kumpikaan kirja ei näytä oikein selvästi ilmaisevan sitä jakoalgoritmin perusideaa: jaettavasta vähennetään aina sellainen jakajan monikerta, että erotuksen asteluku pienenee. *Juuri* rientää heti muotoilemaan lauseen, jonka mukaan polynomi $P(x)$ on jaollinen polynomilla $x-a$ jos ja vain jos $P(a)=0$. Kun kirjalla ei tässä vaiheessa ole vielä käytössään polynomin jakoyhtälöä, todistus jää puolinaiseksi. *Tekijällä* lause tulee hiukan myöhemmin. Kummassakaan kirjassa ei kuitenkaan perustella sitä edellisenkin kannalta olennaista seikkaa, että jakoyhtälön jakojäännöspolynomin asteluku on alempi kuin jakajapolynomin.

Korkeampaa kuin toista astetta olevien polynomiyhtälöiden ratkaisemiskeinona *Juuri* kertoo sen, että kokonaislukukertoimisen polynomin kokonaislukunollakohdat ovat sen vakiotermin tekijöitä. Perustelu on vähän mutkikas, kun edetään polynomin tekijöihin jaon kautta sen sijaan että huomattaisiin nollakohta suoraan muiden kuin vakiotermin tekijäksi, jolloin sen on oltava vakiotermissäkin tekijänä.

Opetussuunnitelmassa ei ollenkaan mainita käsitettä *kompleksiluku*. Tätä omituisuutta eivät kummankaan kirjan tekijät näy aivan purematta nielleen, sillä kummassakin kirjassa on jakso kompleksiluvuista. *Juuri* käyttää aiheeseen neljä ja *Tekijä* 14 sivua. Jälkimmäisen käsittely on siis olennaisesti kattavampi ja sisältää mm. kompleksilukujen graafisen esityksen modulin ja argumentin avulla. Kirjat tarvitsevat kompleksilukuja algebran peruslauseen muotoiluun. Todistusta ei oikein voisi käytössä olevien keinojen avulla yrittääkään.

Molempien kirjojen toinen pääasia on yhtälön numeerinen ratkaisu. *Tekijän* johdatus antaa ymmärtää, että yhtälöt, joita ei algebrallisesti voida ratkaista, voidaan ratkaista numeerisesti. *Juuri* lupaa realistisemmin, että on olemassa algoritmeja, joiden avulla voidaan löytää ”yhä pienempiä välejä, joilla ratkaisu varmasti on”.

Kummatkin kirjat esittävät ensimmäisenä numeerisena yhtälönratkaisukeinona puolitusmenetelmän ja siirtyvät sitten Newtonin menetelmään. (*Juuri* mainitsee myös nimen *Newtonin–Raphsonin menetelmä*; Newtonin aikalaisella *Joseph Raphsonilla* lieneekin ollut ratkaiseva merkitys menetelmän nykyisen formalismin synnyssä.) Sen rekursiokaavan pohjaksi *Tekijä* käsittelee ensin iterointia yleisesti. Molemmissa kirjoissa on vielä luku yhtälön $f(x) = x$ likimääräisestä ratkaisemisesta iteroimalla. Vain *Tekijä* pyrkii perustelemaan menetelmän suppenemisehtoa $|f'(x)| \leq k < 1$ kiintopisteen sisältävällä välillä; ehdon kertoo kyllä *Juurikin*.

Opetussuunnitelman vaatimus muutosnopeuden määrittämisestä numeerisesti on synnyttänyt kumpaakin kirjaan derivaattaa ja erotusosamääriä käsittelevän luvun. Ne antanevat syvyyttä jo aikaisemmilla kursseilla käsitellyille asioille. Uutena asiana esitellään keskeisdifferenssi. *Juuri* muistaa huomauttaa, että keskeisdifferenssin käyttäytymisestä ei kuitenkaan voi päätellä funktion derivaatan olemassa oloa.

Numeerisiin integrointimenetelmiin kumpikin kirja johdattaa lukijan käyrän ja x-akselin rajaaman pinta-alan approksimoinnin kautta. Aloitetaan ”suorakulmiosäännöistä”, joiden antamat tulokset riippuvat yleensä siitä, missä osavälin pisteessä funktion arvo lasketaan. *Tekijä* samaan vauhtiin puolisuunnikassäännön, *Juuri* viipyy pitempään suorakulmiosäännön eri versioissa, joita ovat mm. eräissä integraalin määrittelytavoissa esiintyvät ylä- ja alasummat. *Tekijä* esittää *Simpsonin säännön* suorakulmio- ja puolisuunnikasmenetelmien painotettuna keskiarvona. Lukija jää ihmettelemään, miksi suorakulmiosumman painoksi otetaan juuri 2 ja puolisuunnikassumman 1. *Juuri* perustelee menetelmän tutulla ja ymmärrettävällä tavalla, funktion kuvaajan korvaamisella paloittain paraabelin kaarilla. Tosin tätä kautta syntyvään lausekkeeseen johtavia laskuja ei tehdä – viitataan vain harjoitustehtävään, jossa puolestaan kehotetaan käyttämään symbolisen laskennan ohjelmistoa.

Tekijän numeerista integrointia käsittelevän luvun viimeinen kohta on ”Määrätty integraali laskimella”. Sen mukaan ”määrätty integraali voidaan määrittää laskimella käyttäen valmista syöttöpohjaa tai omaa komentoa” ja annetaan näistä esimerkki. Olisi voinut muistuttaa, että laskulaitteiden antamat tulokset on usein saatu esitellyistä menetelmistä kehitetyillä algoritmeilla ja että ne ovat usein likiarvoja.

Molemmat tarkasteltavat kirjat ovat melko samanlaisia. *Tekijä* on aika monessa paikassa hiukan perusteellisempi. Kirjassa on erityisesti kompleksilukuja käsitelty selvästi kilpailijaa perusteellisemmin. Mutta jos rajoitutaan opetussuunnitelman vaatimaan sisältöön, kirjojen plussat ja miinukset taitavat jakautua melko lailla tasan. Ja kurssiin 12 mennessä opettaja ja oppilas jo lienevät tottuneet jompaankumpaan sarjaan ja tekevät valintansa siltä pohjalta.