

Pitkä matematiikka, lukuteoria ja todistaminen

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Anni Laitinen, Terhi Raittila ja Tommi Tikka : **Juuri 11. MAA11 Lukuteoria ja todistaminen.** 138 s. Otava 2017. Hinta tammikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 21,96 – 29,20 euroa.

Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: **Tekijä. Pitkä matematiikka 11. Lukuteoria ja todistaminen.** 155 s. Sanoma Pro 2017. Hinta tammikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 21,10 – 27,40 euroa.

Lukion pitkän matematiikan opetussuunnitelman erikoisuuksia on se, että todistaminen, joka juuri erottaa matematiikan muista tiedonaloista ja joka on koko matematiikan deduktiivista rakennetta koossa pitävä toiminto, esitellään vasta lukion matematiikan yhdennessätoista kurssissa. Kurssi ei ole edes pakollinen, vaan ”valtakunnallinen syventävä kurssi”. Pitkän matematiikan oppimäärän voi siis suorittaa tulematta tietämään mitään epäsuorasta todistamisesta tai induktiosta.

Opetussuunnitelma listaa kurssin 11 keskeiseksi sisällöiksi (loogiset) konnektiivit, geometrisen todistamisen, suoran, käänteisen ja ristiriitatodistuksen sekä induktiotodistuksen. Kurssiin on liitetty toinenkin aihekokonaisuus, lukuteoria. Sen keskeiset sisällöt ovat opetussuunnitelman mukaan kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö, Eukleideen algoritmi, alkuluvut ja Eratostheneen seula, aritmetiikan peruslause ja kokonaislukujen kongruenssi.

Historiaan nojaava perinne on kautta aikojen opettanut todistamista ennen kaikkea geometrian yhteydessä. Kun Eukleides on hylätty, niin lukuteorian on kai arveltu tarjoavan jonkinlaisen korvaavan alustan todistamiseen harjaannuttamiselle. Ja miksikäs ei: lukuteorian alkeet muodostavat kauniin eikä kovin vaikean deduktiivisen rakenteen: jaollisuus, jakoyhtälö, Eukleideen algoritmi, lineaarinen Diofantoksen yhtälö ja viimein aritmetiikan peruslause.

Esillä olevat oppikirjat käsittelevät opetussuunnitelman määrittämät asiat eri järjestyksessä. *Juuri* aloittaa lukuteoriasta ja käsittelee lopussa todistamista, *Tekijän* järjestys on opetussuunnitelman mukainen.

Juuren lukuteoriaa ei voi pitää mitenkään todistamiseen ja deduktioon suuntautuvana. Jo jaollisuuden määritelmä on lähinnä toiminnallinen: a on jaollinen n :llä, jos jakolasku $\frac{a}{n}$ menee tasan. Tämä voi herättää filosofisen kysymyksen: voidaanko käsitettä ollenkaan soveltaa esimerkiksi niin suuriin lukuihin, että jakolaskun tasan menemistä on mahdoton tutkia? Jaollisuuden siirtyminen summaan ja tuloon perustellaan edelleen jakolaskun tasan menemisellä, ikään kuin osittelu- ja liitäntälakeja ei tunnettaisi. Jakoyhtälö esitetään sekin todistuksetta, jakolaskuun ja jakojäännökseen viitaten. Ja asiaan liittyvistä esimerkeistä ilmenee, että ”menee tasan” on asia, jonka voi jättää koneen päätettäväksi. Kun on muodostettava jakoyhtälö $7451 = 7n + r$, niin neuvotaan ensin laskettavaksi, ilmeisesti laskimella, että $7451/7 = 1064,428\dots$, joten $n = 1064$. *Juuri* ei esittele jaollisuuden merkintää $n|a$.

Peräti erikoinen on *Juuren* suhtautuminen kokonaisluvun alkulukuhajotelman yksikäsitteisyyteen eli aritmetiikan peruslauseeseen. Se esitetään tummennetulla pohjalla sivulla 20 ilman mitään kommenttia tai mainintaa todistamisesta tai todistamisesta jättämisestä.

Neljä sivua myöhemmin aritmetiikan peruslauseeseen vedotaan, kun todistetaan niin ikään lauseeksi muotoiltu tulos siitä, että jos alkuluku p on tulon ab tekijä, niin se on joko a :n tai b :n tekijä. Kaikki tuntemani aritmetiikan peruslauseen todistukset perustuvat kuitenkin tähän jälkimmäiseen tietoon, jonka todistus palautuu Eukleideen algoritmiin. En saata uskoa, etteikö asia olisi *Juuren* kirjoittajille tuttu. Asioiden esittäminen tässä järjestyksessä on melko lailla moraalitonta.

Juuren lukuteoriaosa synnyttää yhtä ja toista kummasteltavaa. Mainitaan vielä sivun 40 määritelmä, joka kertoo asiallisesti, että a ja b ovat kongruenteja modulo n , jos $a = b + nq$ jollain q . Tämän jälkeen kerrotaan, että ”käytetään merkintää $a \equiv b \pmod{n}$, jota kutsutaan kongruenssiksi”. Käsite ja sen merkintä, sama asiako?

Lukuteorian sovelluksista *Juuri* esittelee mm. RSA-salausalgoritmin ja viivakoodin tarkistusnumeron määräytymisen. Sitä, miksi RSA toimii, ei ihan lukuteorian kurssin tiedoin voi selittää.

Tekijä lähestyy lukuteoriaa tämän kirjoittajan näkemyksen mukaan selvästi kilpailijaansa korrektimmin. Jakoyhtälö todistetaan ja edellä mainitulle aritmetiikan peruslauseen kannalta keskeiselle apulauseelle esitetään kelvollinen todistus. Aritmetiikan peruslause tulee oikein perustelluksi.

Ehkäpä *Tekijän* paremmuus kilpailijaan verrattuna perustuu siihen, että se aloittaa todistamisesta itsestään ja käyttää sitten lukuteoriaosastoa. Molemmat kirjat jakavat todistusosan kahteen lukuun, joista edellinen käsittelee lauselogiikkaa ja jälkimmäinen matematiikassa käytettäviä todistusmenetelmiä. Edellisen luvun kohdalla kirjat eroavat mm. siinä, että vain *Tekijä* käsittelee hiukan myös predikaattilogiikkaa. *Juuren* lukija ei tule tuntemaan käsitettä kvanttori.

Myös todistamista käsittelevissä luvuissa *Tekijä* on *Juurta* seikkaperäisempi ja täsmällisempi. Se hyödyntää lauselogiikassa opittuja asioita ja esimerkiksi pohjaa induktioto- distuksen selvästi induktioaksiomaan, siinä missä *Juuri* kirjoittaa induktioto- distuksen ”lauseena”. Matemaatikolle lause on aina sellainen väittämä, joka todistetaan (tai ainakin perustellaan, miksi todistus jätetään esittämättä), mutta *Juuri* tuntuu suhtautuvan termiin avaramielisemmin.

Kumpikin kirja esittelee perinteisestä geometrian oppimäärästä tutut todistuksen osat oletuksen, väitteen ja varsinaisen todistuksen. Mutta kummastuttaa, että epäsuoraan tai ristiriitatodistukseen liittyvää väitteen negaatiota, jota pidetään todistuksessa oikeana, ei kumpikaan kirja halua kutsua vastaoletukseksi, niin kuin loogista olisi. Aiheeseen liittyvissä esimerkeissä vastaoletus tuodaan esiin erilaisin kiertoilmaisuin. Ei ole harvinaista nähdä sinänsä oikeita oppilaiden tuotoksia, jotka alkavat ”vastaväitteen” esittämisellä.

Matemaattisen kirjoittamisen erikoisuuksia *Tekijä* esittelee myös siten, että se käyttää aika johdonmukaisesti todistuksen päättävää \square -merkkiä ja kertoo myös, että sen voi korvata lyhenteellä m.o.t. Kansainvälistyvänä aikanamme ei varmaan olisi haitannut, jos myös *qed* olisi mainittu. *Juuresta* ei tällaisiakaan tietoja silmään satu.

Olen näissä esittelyissäni korostanut, että katselen kirjoja matemaatikon silmin. Useimpien kurssien kohdalla en ole olennaista eroa teksteistä osannut löytää. Tällä kertaa on sanottava, että kriteerieni mukaan *Tekijä* on selvästi parempi. Onko näin käytännön opetustyön kannalta, on kysymys, johon en osaa kantaa ottaa.