Pitkä matematiikka, integraalikurssi

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri 9. Integraalilaskenta.** 156 s. Otava 2015. Hinta tammikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 23,20 – 27,75 euroa.

Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 9. Integraalilaskenta.** 160 s. Sanoma Pro 2017. Hinta tammikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 21,10 – 27,40 euroa.

Suomessa ja monissa muissakin kulttuureissa on pitkään ollut tapana niputtaa matemaattisen analyysin perusmenetelmät yhdeksi opiksi, *differentiaali- ja integraalilaskennaksi*. Anglosaksit käyttävät lyhennenimeä *calculus*. Kursseiksi paloitellussa lukion pitkän matematiikan oppimäärässä tämän opin jälkimmäinen osa tavataan vasta yhdeksännessä kurssissa. Opetussuunnitelma listaa kurssille neljä sisältöä: integraalifunktio, alkeisfunktioiden integraalifunktiot, määrätty integraali ja pinta-alan ja tilavuuden laskeminen.

Historiallisesti integraali on kehittynyt erilaisista menetelmistä määrittää suureita, jotka on jaettavissa sellaisiin pieniin osiin joiden mittojen summana suure ilmentyy. ”Differentiaali- ja integraalilaskenta” syntyi Newtonin ja Leibnizin oivalluksesta, jonka mukaan summa oli usein helppo määrittää ”differentioinnille” käänteisenä operaationa. Tavallinen tapa opettaa integraalilaskentaa on lähteä tästä käänteisestä operaatiosta. Tämä ajatus näkyy myös opetussuunnitelman sisältöluettelosta.

Lukion pitkän matematiikan kaksi vaihtoehtoista oppikirjasarjaa seuraavat yleensä molemmat jokseenkin tarkoin opetussuunnitelmaa ja ovat senkin vuoksi kovin samanlaisia. Kurssi 9:n kohdalla on kuitenkin toisin. **Juuri** noudattaa opetussuunnitelman järjestystä, mutta **Tekijä** lähtee rohkeasti seuraamaan historiallista ja epäilemättä motivoivampaa järjestystä alkamalla esityksensä määrätystä integraalista. Derivoinnin kääntäminen toisin päin on toki näppärää, mutta alkuun ei ole selvää, onko se kovin merkittävää.

Tekijä aloittaa integraalilaskentansa ilmoittamalla välillä $[a,\, b]$ jatkuvan funktion määrätyksi integraaliksi

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

(molemmat kirjat noudattavat tämän kirjoittajan mielestä perusteetonta käytäntöä kirjoittaa differentiaalin d kursiivin sijasta antiikvana d) tasavälisiin jakojen liittyvien funktion alasummien raja-arvon, kun jako-osien määrä kasvaa rajatta. Pian kirja kertoo, että määritelmä voidaan yleistää ei-jatkuviinkin funktioihin. Ihan näin yksinkertaistahan asia ei ole, jotain säännöllisyydestä on tiedettävä. Määrätty integraali kytketään funktion kuvaajan rajaaman alueen pinta-alaan, ja tätä kautta johdetaan integraalin lineaarisuusominaisuudet ja additiivisuus integroimisvälin suhteen. Johto edellyttää, niin kuin kirja huomauttaakin, sen, että funktio säilyttää merkkinsä.

Tekijän omaksuma tie ei ole ihan sileä. Laskuesimerkkejä ei alkuun juuri voi esittää, kun helppojenkaan funktioiden integraaleja ei voi laskea. Tehtävä, jossa olisi sovellettava lineaarisuutta yksinkertaisen polynomifunktion integroimiseen, vaatii, että kerrotaan erikseen totuudet

$$\int_0^6 x^2\,dx = 72$$

ja

$$\int_0^6 x\,dx = 18.$$

Differentiaali- ja integraalilaskennan peruslauseen pohjustukseksi **Tekijä** määrittelee *kertymäfunktion*

$$K_a(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Määritelmä ei ole ristiriidassa sen kanssa, miten termiä sen tutussa ympäristössä, satunnaismuuttujan yhteydessä käytetään. Yhtälön $K_a'(t) = f(t)$ johto tehdään jälleen pinta-aloihin turvautumalla. Kirjassa kyllä viitataan siihen, että johto olisi tehtävissä "analyyttisesti", muttei kerrota, miten.

Sekä **Tekijä** että **Juuri** jättävät käsittelemättä muuttujan vaihdon integraalissa. Sijoitusmenetelmän sijasta esitetään "yhdistetyn funktion integroimissääntö": jos $U' = u$, niin

$$\int s'(x)u(s(x))\,dx = U(s(x)) + C.$$

Sen avulla selvitään ainakin helposti tapauksista, joissa s on lineaarinen funktio. Tähän liittyen: **Tekijä** esittää yleisen eksponenttifunktion $a^x = e^{x\ln a}$ integroinnin vain harjoitustehtävässä, **Juuri** tekstissäkin.

Juuri noudattaa perinteistä tapaa esittää integrointiin liittyvät asiat. Näin lienevät opetussuunnitelman laatijatkin ajatelleet. Heti aluksi integraalilaskennan päätehtävän kerrotaan olevan derivoinnin käänteisoperaation selvittäminen. Niinpä esitys alkaa integraalifunktiosta

$$\int f(x)\,dx.$$

Tätä tietä kuljettaessa ensimmäinen ihmettelyn aihe on integraalifunktion omituinen merkintätapa. **Juuri** tätä perustelee, mutta perusteluissa tuntuvat derivaatan ja differentiaalin käsitteet menneen sekaisin. Esiteltyään ensin polynomifunktioiden integraalifunktiot **Juuri** kertoo määrätyn integraalin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

olevan erotuksen $F(b) - F(a)$ lyhennysmerkintä, kun F on jokin f:n integraalifunktio. (Kansainvälisenä aikanamme ei kai olisi ollut pahitteeksi kertoa, että merkintää

$$F(b) - F(a) = \Big/_{a}^{b} F(x)$$

ei juuri muualla näe kuin Suomessa.)

Ei-negatiiviselle funktiolle f **Juuri** määrittelee totuttuun tapaan pinta-alafunktion A, ja osoittautuu, että $A'(x) = f(x)$. Kun pinta-alaa voidaan approksimoida funktion ala- ja yläsummilla, saadaan kytkentä tällaisten summien ja määrätyn integraalin välille. **Juuren** tekstistä ei selvään käy ilmi, mitä funktiosta tässä yhteydessä f oletetaan.

Molemmat kirjat päättävät esityksensä tilavuuskysymyksiin. Kun käytössä on vain yhden muuttujan funktion integrointi, joudutaan tyytymään sellaisiin tilavuuksiin, jotka voidaan jakaa yhdestä muuttujasta riippuviin tilavuusalkioihin. Pyörähdyskappaleet ovat tällaisia. Molemmat kirjat esittävät hiukan yleisemmänkin tilavuudenlaskemiskaavan

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ja **Juuri** siitä seuraavan *Cavalierin periaatteen.*

Muutama pikku havainto vielä. **Juuri** kertoo mekaniikan vakiintuneiden ajan, matkan, nopeuden ja kiihtyvyyden symbolien t, s, v ja a olevan näitä tarkoittavien englannin sanojen alkukirjaimia. Kyllä kai nämä latinaan palautuvat kirjaimet ovat olleet yleisessä käytössä jo ennen englannin valtakautta. Harjoitustehtävät ovat kovin usein numeerisia, ja kirjojen lopussa olevissa vastausluetteloissa on vain lukuarvoja. Esimerkiksi **Tekijän** harjoitustehtävässä 300 pyydetään laskemaan tietynmittaisten ympyrätoruksien tilavuuksia, ja vastaukset ovat lukuarvoja. Tällainen tehtävä olisi aika hauska ihan yleisin mitoin, tuleehan tilavuuden lausekkeeseen kerroin π^2, mikä ei niin kovin tavallista ole, ja tilavuus osoittautuu samaksi, kuin lieriön, jonka pohja on toruksen leikkausympyrä ja korkeus sama kuin sen ympyrän kehä, jonka säde on etäisyys toruksen keskipisteestä toruksen leikkausympyröiden keskipisteisiin.

Matematiikan historiakin osoittaa, että integraali ei ole helppo käsite. Koulukurssissa on ilmeisesti välttämättä jätettävä yksi jos toinenkin detalji käsittelemättä. Arvioitavina olevat kirjasarjat ovat valinneet eri tiet. Vaikea on sanoa, kumman valinta on ollut viisaampi. Luultavasti **Juuri** on tällä kertaa helpommin lähestyttävä teksti.