Pitkä matematiikka, kahdeksas kurssi

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Erkki Luoma-Aho, Terhi Raittila ja *Tommi Tikka* : **Juuri 8. MAA8 Juuri- ja logaritmifunktiot.** 154 s. Otava 2017. Hinta joulukuussa 2018 eri verkkokaupoissa 20,86 – 27,75 euroa. *Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas* ja *Jorma Tahvanainen*: **Tekijä. Pitkä matematiikka 8. Juuri- ja logaritmifunktiot.** 160 s. Sanoma Pro 2017. Hinta joulukuussa 2018 eri verkkokaupoissa 21,14 – 27,40 euroa.

Matemaattisen analyysin peruspalikat, alkeisfunktiot, tulevat lukion pitkää matematiikkaa opiskelevien tietoisuuteen kovin tipoittain. Vaikka logaritmi on jo ykköskurssissa tavattu ja kokonaislukueksponenttisiin potensseihin ja kokonaislukuindeksisiin juuriin tutustuttu kakkoskurssissa, niin potenssiin, jonka eksponentti on mielivaltainen, päästään käsiksi vasta kahdeksannessa kurssissa.

Pitkän matematiikan kahdeksannen kurssin sisällöt opetussuunnitelma määrittelee aika lyhyesti. Kurssin keskeisiksi sisällöiksi luetellaan "potenssien laskusäännöt, juurifunktiot ja yhtälöt, eksponenttifunktiot ja yhtälöt, logaritmifunktiot ja -yhtälöt" ja "juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat".

Eksponentin käsitteen laajentaminen tulon samojen tekijöiden lukumäärää ilmaisevasta positiivisesta kokonaisluvusta kokonaislukuihin ja rationaalilukuihin tavalla, jota ohjaa toive laskusääntöjen säilymisestä, on itse lukukäsitteen laajentamisen ohessa alkeismatematiikan hienoimpia esimerkkejä matemaattisen teorianmuodostuksen mekanismeista. Kun oppikirjat enimmältään tyytyvät antamaan määritelmät niiden välttämättömyyttä perustelematta, jää käyttämättä tilaisuus opettaa matematiikkaa. Siirtyminen rationaalisista irrationaalisiin eksponentteihin on kovasti epätriviaali asia. Tarkasteltavista oppikirjoista **Tekijä** kertoo hiukan luvun korottamisesta irrationaalieksponenttiseen potenssiin. **Juuri** näyttää huomaavan asian vasta eksponettifunktiota määritellessään. Sivulta 77 voi lukea, että "Funktiota $f(x) = a^x$, jossa $a \neq 1$ on positiivinen vakio, sanotaan eksponenttifunktioksi. Eksponenttifunktio on jatkuva ja sen määrittelyjoukko on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$." Tätä seuraa sitten huomautus, että "määritelmää irrationaaliluvuille x ei käydä läpi tässä kirjassa". Käsittääkseni tässä ollaan aika lähellä tunnustuksellista uskonnonopetusta.

Molemmat kirjat yleistävät sumeilematta kokonaislukueksponettisen potenssin aiemmin opitun derivoimiskaavan muihin eksponentteihin. **Tekijä** esittää kaavan lauseena, jota seuraa todistus. Todistus kuitenkin heti alkaa toteamuksella, että todistetaan lause, kun eksponentti on rationaaliluku. Hyvä tietysti, että edes silloin. **Juuri** nimittäin rajaa todistuksen tapaukseen, jossa eksponentti on $\frac{1}{2}$. Omituista on, että opetussuunnitelma piilottelee käänteisfunktion käsitettä ja käänteisfunktion helposti perusteltavaa derivointisääntöä. Ainakin tässä kurssissa niille olisi käyttöä.

Eksponenttifunktion derivaatta esitellään molemmissa kirjoissa erilaisin, mutta ihmeellisin kehäpäätelmin. **Juuri** luottaa ilmeisesti sähköisiin apuvälineisiin, koska se käsittelee eksponenttifunktion $x \mapsto a^x$ derivaattoja tuttuina asioina ja tekee niiden kuvaajista päätelmän, että on olemassa jokin kantaluku, jolle eksponenttifunktion derivaatta on funktio itse. No, tämähän on oiva Neperin luvun e määritelmä! **Tekijä** puolestaan piirrättää eri a:n arvoilla tangentteja käyrälle $y = a^x$ pisteeseen (0, 1) ja löytää sellaisen a:n jolle tangentin kulmakerroin on 1. Se on e jälleen. Nyt onkin aika helppo johtaa e^x:n erotusosamäärälle raja-arvo e^x. – Kummankaan kirjan lukija ei tule tietämään, että

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

tai

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Vielä muutama pieni ihmettely. **Tekijä** johtuu erään esimerkin yhteydessä epäyhtälöön $4 - x^2 \geq 0$. Lukijaa kehotetaan ratkaisemaan epäyhtälö laskimella! **Juuri** puolestaan opastaa turvautumaan symbolisen laskennan ohjelmiin yksinkertaiseksi ensimmäisen asteen yhtälöksi palautuvan yhtälön $x + \sqrt{x^2 - 2x + 1{,}81} = 1{,}6$ ratkaisemiseksi.

Ehkä vähän huvittavakin vastoinkäyminen on kohdannut **Tekijää** sivulla 70. Logaritmien laskusääntöjen viereen on marginaaliin painettu teksti ”Skotlantilainen John Napier esitteli vuonna 1614 käsitteen logaritmi helpottamaan kerto- ja jakolaskuja.” Tekstin alla on kuva, jonka voisi olettaa esittävän John Napieria. Kun mies on kuitenkin 1800-luvun vaatteissa ja silmälasipäinen, herää epäilyksiä. Tarkempi selvitys näyttää, että kuva esittää Sir Charles Napieria, englantilaista Napoleonin sodissa ja Intian siirtomaasodissa kunnostautunutta upseeria. Tässä olisi tapausesimerkki internetlähteiden epäluotettavuudesta varoittaville. – Uuden Seelannin Pohjoissaarella on Napier-niminen kaupunki. Se ei ole saanut nimeään logaritmien keksijästä, vaan juuri tästä pari sataa vuotta nuoremmasta kenraali Napierista.