

Differentiaali- ja integraalilaskentaa, syvemmältä?

Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Petri Juutinen, Anni Laitinen, Erkki Luoma-aho, Terhi Raittila ja Tommi Tikka : **Juuri 13. MAA13 Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.** 187 s. Otava 2018. Hinta huhtikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 23,10 – 29,20 euroa.

Paavo Heiskanen, Päivi Kaakinen, Jukka Lehtonen, Mika Leikas ja Jorma Tahvanainen: **Tekijä. Pitkä matematiikka 13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.** 184 s. Sanoma Pro 2018. Hinta huhtikuussa 2019 eri verkkokaupoissa 23,50 – 29,55 euroa.

Lukion pitkän matematiikan oppimäärän painopistealueena voidaan pitää matemaattista analyysiä, erityisesti differentiaali- ja integraalilaskentaa. Vaikka analyysiä käsitellään monissa pitkän matematiikan kursseissa, paljon jää sanomattakin. Niinpä opetussuunnitelman viimeinen kurssi, kolmas valtakunnallinen pakollinen kurssi, on differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.

Kurssin tavoitteiden ja keskeisten sisältöjen luettelot opetussuunnitelmassa ovat pitkähköt. Opiskelijan edellytetään mm. ”syventävän differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan”. Käänteisfunktioon ja epäolennaisiin integraaleihin liittyvät asiat ovat jääneet jatkokurssiin. Aikaisemmissa kursseissa on muutamissa kohden lykätty asioiden perusteluja jatkokurssiin. Eräissä tapauksissa luvatut asiat eivät oikein toteudu. *Tekijän* kuudes osa esimerkiksi kertoo, että todistus sille, että derivaatan ei-negatiivisuus implikoi funktion kasvavuuden, perustuu väliarvolauseeseen, jota ei todisteta ja johon tutustutaan kurssissa 13. Kurssin 13 kirjan asiahakemistossa ei kuitenkaan ole väliarvolauseita. Sen sijaan väliarvolause muotoillaan harjoitustehtävässä, todistuksetta ja varoituksin siitä, että nyt mennään opetussuunnitelman ulkopuolelle. Juuri esittää väliarvolauseen todistuksetta kurssissa 6 eikä palaa asiaan käsillä olevassa jaksossa.

Molempien tarkasteltavien oppikirjojen ensimmäinen luku esittelee uudestaan jatkuvuuden ja derivoituvuuden perusteita. *Tekijä* sisällyttää avauslukuun myös käänteisfunktion, jonka *Juuri* puolestaan jättää viimeiseen lukuun, jossa toisena asiana on useamman muuttujan funktio. Hämmästyttävää on, että molemmat kirjat määrittelevät raja-arvon melkein samoin sanoin. Näin *Juuri*: ”Funktion f raja-arvo kohdassa a on luku b , jos funktion arvo $f(x)$ lähestyy lukua b , kun x lähestyy kohtaa a .” Tämän mukaan olisi vaikkapa $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = -100$. *Tekijä* sentään painaa määritelmän viereen petiitillä huomautuksen siitä, että $f(x)$:n on tultava lähelle b :tä, kun x on lähellä a :ta.

Juuri esittelee myös ”epäolennaiset” raja-arvotapaukset, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja rajatta kasvamisen tietyn pisteen kohdalla. Nämä tarkastelut *Tekijä* esittää toisessa pääluvussaan, jonka otsikko on Epäoleellinen integraali. *Tekijä* on *Juurta* pedantimpi toispuolisten raja-arvojen huomioon ottamisessa. *Juuri* esimerkiksi kertoo vain merkinnän $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ sisällön, mutta kirjoittaa kohta

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x}{x-2} \right) = -\infty.$$

Kummankin kirjan epäoleellisia integraaleja käsittelevä jakso täydentää todennäköisyyskurssia, jossa ei ole voitu täydellisemmin käsitellä äärettömissä joukoissa määriteltyjä jat-

kuvia jakaumia kuten normaalijakaumaa.

Käänteisfunktioita olisi kaivannut jo aikaisemmissa kursseissa, vaikkapa perustelemaan logaritmfunktion derivaattaa eksponenttifunktion derivaatan avulla. Opetussuunnitelman laatija on kuitenkin nähnyt viisaaksi säästää kurssia 13 opiskelemattomat käänteisfunktioilta ja sen derivaatalta. Minkä tietoa lisää, sen tuskaa lisää, sanoi jo Salomokin. Kirjat esittävät käänteisfunktion derivoinnin eri tavoin: *Tekijä* olettaa funktion ja käänteisfunktion derivoituviksi ja derivoi yhdistetyn funktion $f^{-1} \circ f$, *Juuri* taas kertoo (muttei eksplisiittisesti perustelee), että käänteisfunktion derivoituvuus ja derivaatta selviävät erotusosamäärästä. Derivaattakaavan johdon *Juuri* esittää samoin kuin *Tekijä*.

Opetussuunnitelman esittämien tavoitteiden mukaisesti kummassakin kirjassa on melko laaja lukujonoille omistettu osasto. Itse käsitehän on tullut vastaan jo ensimmäisessä, pitkän ja lyhyen matematiikan yhteisessä kurssissa. *Juuri* syyllistyy lukujonon raja-arvoa määrittellessään samaan ilmaisun epätäsmällisyyteen kuin funktion raja-arvonkin tapauksessa. *Tekijä* on huolellisempi ja esittää jopa ε -tyyppisen määritelmän. *Juuri* omistaa alaluvun monotonisille jonoille (ja käyttää termiä *monotoninen* tilanteesta, josta on tapana käyttää termiä *aidosti monotoninen*). Tästä innovaatiostaan kirja kyllä asianmukaisesti ilmoittaa, joten se tuskin sekaannuksiin johtaa.

Molemmat kirjat päättävät esityksensä kahden muuttujan funktion lyhyeen esittelyyn ja osittaisderivaattojen määrittelyyn. *Juuri* on valinnut osittaisderivaattojen merkinnäksi f'_x ja f'_y , *Tekijä* puolestaan $\partial_x f$ ja $\partial_y f$. Perin tavallisia merkintöjä

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

ei kummankaan kirjan lukuja tule tuntemaan. *Tekijä* esittelee myös funktion gradientin, *Juuri* puolestaan funktion tasa-arvokäyrät. Gradientti tasa-arvokäyrää vastaan kohtisuorana suuntana olisi ollut mukava yhdistelmä näistä. Varsinaisena osittaisderivoinnin sovelluksena annetaan derivaattojen yhtäaikainen häviäminen ääriarvon välttämättömänä ehtona.

Näissä esittelyissä, tässäkin, on puututtu erinäisiin kirjoittajan mielestä epätoivottaviin kirjojen ja opetussuunnitelman piirteisiin. Toisaalta: koko materiaalin, *Juuren* vähän alle ja *Tekijän* vähän yli 2200 sivua, molemmat lähes 5 kg ja yli 300 euroa, koostaminen ei ole ollut vähäinen työ. Suoranaisia virheitä tuli vastaan kovin harvoin. Matemaatikkona uskon, että vähemmälläkin olisi selvitty, esimerkiksi karsimalla ja suoraviivaistamalla, mutta kirjoittajat epäilemättä opettajina tuntevat työmaansa. Matemaattisen päättelyn korvautuminen laskulaiteoperaatioilla surettaa, mutta aika aikaa kutakin. Silti ei opetussuunnitelman joka kurssin kohdalla toistama tavoitteen ”osata käyttää teknisiä apuvälineitä” kulloinkin esillä olevan asiakokonaisuuden yhteydessä tarvitsisi johtaa siihen, että erittäin yksinkertaistenkin lasku-, sievennys- tai yhtälönratkaisutehtävien kohdalle painetaan kirjaan kehotus tehdä operaatio laskimella.

Uudet opetussuunnitelmat ovat tekeillä, joten kirjailijoiden ja kustannustoimittajien työ tulee jatkumaan.