

# Uuden lukion yhteisen matematiikan kurssin oppikirjoja

Matti Lehtinen

*Hanna Halinen, Markus Hähkiöniemi, Satu Juhala, Sampsa Kurvinen, Sari Louhikallio-Fomin, Erkki Luoma-Aho, Jukka Ottelin, Kati Parmanen, Terhi Raittila, Tommi Tauriainen, Tommi Tikka ja Sari Vallineva: Otavan matematiikka MAY1. Luvut ja lukujonot.* 168 s. Otava 2016. Hinta eri verkkokaupoissa 16,95 – 22 euroa.

*Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Paavo Heiskanen, Katariina Hemmo, Päivi Kaakinen, Jorma Tahvanainen ja Timo Taskinen: Yhteinen tekijä. Lukion matematiikka 1.* 228 s. Sanoma Pro 2016. Hinta eri verkkokaupoissa 16,95 – 21,40 euroa.

Joitakin vuosia sitten yritin Solmun palstoilla vertailla lukion pitkän matematiikan oppikirjoja matemaatikon silmin. Jonkinlainen toiveeni oli herättää julkista keskusteluakin näistä opetuksen keskeisistä työkaluista, joiden julkinen esittely ja arviointi oli mielestäni suotta jäänyt unohduksiin. Epäonnistuin: sain kai kaikkiaan yhden kommentin, senkin kustannustoimittajalta. Silloin kilpailevia kirjasarjoja oli useita, mutta kustannustoiminta on nyttemmin keskittynyt. Uusien, vuonna 2016 käyttöön tulleiden opetussuunnitelmien mukaisia oppikirjasarjoja näyttää ilmestyvän vain kaksi, Otavan ja Sanoma Pron kustantamat. Sanoma Pron juuret ovat WSOY:ssä.

Matematiikan lukio-opinnot alkavat kurssilla **MAY1**, joka on pakollinen sekä pitkän että lyhyen oppimäärän suorittaville. Filosofia lienee se, että yhteinen kurssi siirtää opiskelijan valintaa eritasoisten oppimäärien välillä hiukan myöhempään ja ehkä sitten hiukan kasvattaisi pitkän oppimäärän valitsevien osuutta. Matemaatikkoa ilahduttaa erityisesti opetussuunnitelmassa ilmaistu tavoite herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaan mm. ”*tutustuttamalla hänet – – matematiikan ainutlaatuihin ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana*”.

Kirjasarjalla on oltava iskevä, helppo, mutta myös jotenkin matematiikan sisältöä välittävä nimi. Sanoma Pro käyttää nimeä **Tekijä** ja erottaa vain alaotsikolla lyhyen ja pitkän matematiikan (sivumennen: sanapari lyhyt/pitkä on näihin yhteyksiin vakiintunut, mutta parempi voisi olla, jos eri oppikurssien nimillä jotenkin viitattaisiin niiden sisältöön), Otava on nimennyt sarjansa jotenkin käänteisesti **Juureksi** (pitkä) ja **Huipuksi** (lyhyt). Sanoma Pro (vielä sivumennen: huonoa makua osoittaen muodostettu nimi, suomea ja slanginomaista englantia) on nyt voinut ottaa yhteisen kurssin kirjan nimeksi **Yhteinen tekijä**. Otava näyttää kiireessä turvautuneen hätäratkaisuun: kirja on saanut nimekseen kurssin kanonisen nimilyhenteen **MAY1**, varustettuna alaotsikolla **Luvut ja lukujonot**.

Tekijä-sarjan eri osien kansikuvien taustakuvana on sama liitutaulunäkymä, jonka eteen on sijoitettu erilaisia, ehkä mikroskoopin avulla tuotettuja luontoaiheita, MAY1 on saanut Juuri-sarjan kirjojen tapaan kanteensa abstrakteja, arvattavasti tietokoneella tuotettuja kuvioita. Kustantajia ei ole pelottanut ansanviisaus, joka väittää sopan laadun ja kokkien määrän olevan kääntäen verrannollisia. Yhteisessä tekijässä on seitsemän kirjoittajaa, MAY1:ssä peräti 12. Nimisivun kääntöpuolelta voi vielä lukea, että Yhteistä tekijää on ollut teknisesti avustamassa kymmenen eri toimittajaa, MAY1:tä kahdeksan. Ilmeisesti kirjasarjojen haarautuminen yhteisen kurssin jälkeen selittää osaltaan suurta tekijämäärää.

Arkijärki sanoo, että näin isot ryhmät toimivat yleensä vain jotenkin strukturoituina. Lieneekö tekijäryhmillä ollut johtajaa tai johtoryhmää, kirjoilla päätoimittajaa?

Kirjoista voi mitata ja laskea yhtä ja toista muutakin. Molemmat kirjat ovat ulkomitoiltaan samat. Ne ovat 24 cm korkeita ja 18 cm leveitä. MAY1 on ohuempi ja kevyempi: 168 sivua ja 350 g, Yhteisen tekijän käyttäjä saa 60 sivua enemmän luettavaa ja yli 100 g enemmän kannettavaa. Leipätekstipalstan korkeus on kummassakin kirjassa enintään 20 cm, MAY1:ssä leveys on yleensä enintään 11,5 cm, mutta eräillä sivuilla 13,5 cm:kin, Yhteisessä tekijässä vain 10 cm. Leveätköjä marginaalejaan Yhteinen tekijä käyttää harjoitustehtävien ja esimerkkien reaalisisältöön liittyvien pikku kuvien (kun harjoitustehtävä koskee taksikyödin hintaa, marginaalissa on kuva taksin katolla vilkkuvasta kilvestä) lisäksi pieniin tietolaatikkoihin, joita laskin olevan vähän yli sata. MAY1 sirottelee vastaavanlaisia laatikoita tekstin sekaan. Niitä on vähemmän, alle 40. Molemmissa kirjoissa on asiahakemisto. Yhteisessä tekijässä hakusanoja on 78, MAY1:ssä 43. Kirjojen sisältöä kvantitatiivisesti arvioidessa on vielä otettava huomioon, että kumpikin kirja aloittaa jokaisen pääluvun kokosivun kuvalla.

Kumpikin kirja noudattaa matematiikan oppikirjoihin viime vuosikymmeninä pesiytynyttä käytäntöä, jonka mukaan kielen säännöt eivät kaikin osin niitä koske. Välimerkkejä käytetään säästellen, peräkkäiset sievennysvaiheet kirjoitetaan ikään kuin liitutaululle ja niitä koskevat kommentit erillisiksi marginaaliin tai tietolaatikkoihin. Kyllä matematiikkaa voisi yhä kirjoittaa niin kuin juoksevaa tekstiä, kaavat lauseenjäsenerinä. Liitutaululle kirjoittavakin yleensä ja toivottavasti säästää tuotostaan puheella, jonka osaa on se kaavamuotoinen teksti. Viime aikoina on voinut lukea monta huolestunutta mielipidettä äidinkielen taidon rapautumisesta. Myös matematiikan kirjojen omalaatuinen ”suomi” voitaisiin liittää näihin huolenaiheisiin.

Yhteinen tekijä jakautuu viiteen päälukuun, 16 alalukuun ja 36 ala-alalukuun. MAY1:n jaottelu on vain kaksipuolainen: kuusi päälukua ja 14 alalukua. Tekstissä käsitellyt esimerkkejä on Yhteisessä tekijässä 72, MAY1:ssä 51. Tekstiin liittyviä harjoitustehtäviä molemmissa kirjoissa on likimain yhtä monta (MAY1 362 ja Yhteinen tekijä 357 kappaletta). MAY1 luokittelee tehtävänsä kolmeen kategoriaan, ”luo perusta”, ”vahvista osaamista” ja ”syvennä ymmärrystä”. Noin puolet tehtävistä kuuluu keskimmäiseen osastoon, viimeiseen hiukan enemmän kuin ensimmäiseen. Yhteinen tekijä tyytyy kahteen tasoon, ”perustehtävät”, lähes kaksi kolmasosaa kaikista, ja ”syventävät tehtävät”. Molempien kirjojen lopussa on lisäksi useita kymmeniä kertaustehtäviä. Yhteinen tekijä osoittaa usean harjoitustehtävän kohdalla eksplisiittisesti, minkä tekstin esimerkin mukaan ratkaisu syntyy.

Useimmat tehtävät tuottavat vastaukseen luvun tai lausekkeen, ja kaikkiin tällaisiin tehtäviin kummassakin kirjassa on vastaus. Sen sijaan niihin harvoihin tehtäviin, joissa opiskelijan olisi jotain pääteltävä, ei ratkaisuja ole. MAY1 antaa myös osaan tehtävistä ratkaisuvihjeitä. Satunnaisesti tarkastamani vastaukset näyttivät yleensä olevan oikein. MAY1:n tehtävään 277 on ilmeisesti painovirhe tuottanut virheellisen vastauksen.

Otava näyttää ottaneen Sanoma Prota vakavammin puheet digiloikasta. Monia MAY1:n sivuja koristaa merkki, joka kertoo Otavan verkkosivujen kautta löytyvästä ”appletista” (olisiko se suomeksi *sovelle*?). Nämä ovat usein Geogebra-ohjelmalla tuotettuja, käsitteitä selventämään tarkoitettuja pikkuohjelmia. Kaikki eivät mene kuin Strömsössä. Esimer-

kiksi sivulla 122 viitataan ympyrän pinta-alaa  $A = A(r)$  säteen  $r$  funktiona demonstroivaan applettiin, joka pystyy tuottamaan parin  $r = 1, A = 2,9$ . Yhteinen tekijä puolestaan käyttää värikoodeja ja merkkejä osoittamaan, milloin tehtävä on tarkoitettu ilman apuvälineitä ratkaistavaksi. Myös tekstin esimerkit on varustettu synbolein, jotka viittaavat laskulaitteen käyttöön tai käyttämättömyyteen. Tällainen merkintä on noin 200 harjoitustehtävässä. MAY1 tyytyy kertomaan tehtävän tekstissä, toivooko se suoritusta ilman elektroniikan tukea.

Opetussuunnitelman mukaan lukion matematiikan aloituskurssin tehtävänä on herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan, paitsi kertomalla matematiikan omasta olemuksesta, myös ja etusijaisesti ”*tutustuttamalla hänet matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle*”. Yhteinen tekijä on pyrkinyt ottamaan tämän huomioon laitamalla heti kirjan alkuun 11 etunimellä mainitun eri aloilla toimivan henkilön (seitsemän miestä ja neljä naista) lyhyet kertomukset siitä, mihin he tarvitsevat matematiikkaa. Useimmille tuntuu syntyvän talousasioihin liittyvän laskemisen tarvetta.

Opetussuunnitelma paaluttaa kurssin sisällön kahdeksankohtaisella luettelolla. Ensimmäinen kohta on *reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta*. Yhteinen tekijä on muodostanut näistä kirjan kolme ensimmäistä päälukua, Luvut ja laskutoimitukset, Potenssi ja Prosenttilasku, yhteensä 88 sivua eli melko tasan puolet kirjan sisältösivuista. MAY1 puolestaan jakaa tämän tiedon ensimmäiseen lukuun Luvut ja lukualueet ja kolmannen luvun Prosentti ja geometrinen lukujono alkuun, yhteensä 37 sivulle. Määrä kattaa noin neljänneksen kirjan sisällöstä. Yhteisen tekijän melko laajasti käsittelemät aiheet kuten ensimmäisen asteen yhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen ja kokonaislukupotenssien laskusäännöt MAY1 yhdellä sivulla olevasta luettelosta tarvittaessa kerrattavista asioista. Etenkin MAY1 käyttää erityistä huomiota kiinnittämättä monia käsitteitä, joiden määrittelyä ja tarkempaa rajausta saattaisi kaivata. Tällaisia ovat esimerkiksi tekijä, lukusuora, etäisyys, erotus, etumerkki, supistaminen, keskiarvo, sekaluku ja neliöjuurimerkki.

Toinen opetussuunnitelman sisältökohta on *funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta*. Yhteinen tekijä on tälle aiheelle omistanut neljännen pääluvun, MAY1 puolestaan jättää aiheen viimeiseen lukuunsa. Yhteinen tekijä esittelee funktion ensin koneena, joka valmistaa luvuista toisia lukuja ja siirtyy sitten määrittelemään funktion sääntönä, joka liittyy määrittelyjoukon lukuihin lukuja. MAY1 ei kerro mitään määrittelyjoukosta: sen funktio on sääntö, joka ilmaisee, miten lähtöarvosta saadaan loppuarvo. Lähtöarvo ja loppuarvo jäävät määrittelemättömiksi. Funktion kuvaajan tulkinta on kummankin kirjan mukaan sen ymmärtämistä, milloin funktion arvot ovat positiivisia, nollia tai negatiivisia. Sen yksinkertaisen havainnon, että kuvaajasta saattaa nähdä funktion kasvu- tai vähenemisominaisuuksia, kumpikin kirja jättää tuonemmaksi.

Opetussuunnitelman kolmas, neljäs, viides ja kahdeksas sisältökohta ovat *lukujono, rekursiivinen lukujono, aritmeettinen jono ja summa* sekä *geometrinen jono ja summa*. Tässä näyttää tehdyn periaatteellinen muutos entiseen: edellisissä opetussuunnitelmissa lukujonot tulivat vastaan pitkän matematiikan kurssissa 9, *Trigonometriset funktiot ja lukujonot*. Muutoksen tarkoitus on saattanut olla pitkän matematiikan ”mainostaminen” valinnastaan epävarmoille oppilaille. ”Liian vaikeuden” välttäminen on ilmeisesti vienyt siihen, että lukujonojen käsittelyn keskeinen työkalu, induktioperiaate, on jätetty pois.

Yhteinen tekijä esittelee lukujonoihin liittyvät asiat viidennessä eli viimeisessä pääluvussa, noin 70 sivulla. MAY1 tuo lukujonon esiin jo aikaisemmin, toisessa pääluvussa. Kolmannessa pääluvussa teemana on prosenttilaskun yhteydessä geometrinen jono ja neljäs pääluku puolestaan käsittelee lukujonojen summia. Kaikkiaan aiheelle kuluu kuutisenkymmentä sivua.

Mikä on lukujono? Yhteinen tekijän mukaan ”Lukujen muodostamaa jonoa kutsutaan *lukujonoksi*”, ja se ”voi olla *päätyvä* eli *äärellinen*”. MAY1:n mukaan taas ”Lukujono on järjestetty ja päättymätön luettelo reaalityyppisiä lukuja”. Kun jokainen jollain tavalla konkreettinen lukujono on välttämättä äärellinen, Yhteisen tekijän kanta tuntuu paremmalta. Toisaalta Yhteisen tekijän määritelmä on aika mitänsanomaton, kun lukujonoon liittyjä järjestys on vain implisiittisenä, sanaan *jono* peitettynä. Yhteinen tekijä olisi mainiosti voinut hyödyntää edellisessä pääluvussa esittelemäänsä funktiokäsitettä ja kertoa, että lukujono on luonnollisten lukujen joukossa tai lukujen  $1, 2, \dots, n$  joukossa määritelty funktio. Hiukan samanlainen kytkentöjen muodostamisen laiminlyönti tapahtuu molemmissa kirjoissa. Opetussuunnitelma mainitsee eksplisiittisesti rekursiivisen lukujonon ja sen jälkeen aritmeettisen ja geometrisen jonon. Kumpikin kirja esittelee rekursiivisen jonon käsitteen, muttei kiinnitä mitään huomiota siihen, että sekä aritmeettinen että geometrinen lukujono ovat rekursiivisia.

Kun opetussuunnitelmassa mainitaan sana *summa*, molemmat kirjat esittelevät summamerkinnän  $\sum_{k=1}^n a_k$ . Kumpikaan kirja ei käytä hyväksi sitä yksinkertaista totuutta, että summamerkinnän avulla ilmaistu summa noudattaa osittelu- ja vaihdantalakeja. Summa-merkistä ei näin ollen näytä olevan juuri hyötyä vaikkapa aritmeettisen summan laskemisessa. Ehkäpä se onkin esitetty symbolisissa laskimissa olevan summatoiminnon pohjustukseksi. Kumpikaan kirja ei näytä määrittävän yksinkertaisinta aritmeettista summaa

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1). \quad (1)$$

Aritmeettisen ja geometrisen summan lausekkeet on yleensä mielletty kuuluviksi koulumatematiikan yleissivistykseen. Lausekkeiden varsin yksinkertainen johto tehdään kirjojen esimerkeissä useassakin erikoistapauksessa, mutta yleiset johdot on piilotettu harjoitustehtäviin, eikä aina niihinkään. Menettely saattaa pohjautua opetussuunnitelman tavoiteosaan: sen mukaan opiskelijan tulisi saada ”*havainnollinen käsitys lukujonon summan määrittämisestä*”. Jos (1) olisi käytössä, aritmeettisen summan lauseke olisi mukava esimerkki summakaavan hyödyllisyydestä laskulakeihin yhdistettynä.

Ehkä suurimman haasteen opettajalle ja oppikirjan tekijöille muodostaa opetussuunnitelman kuudes keskeinen sisältö: logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys. Logaritmi- ja eksponenttifunktiot ovat toistensa käänteisfunktioita, joten potensseista on lähdettävä. Yhteinen tekijä esittelee laajajakosti potensseja, joiden eksponentti on kokonaisluku, MAY1 rajoittuu positiivisiin kokonaislukueksponentteihin. Sitten jostain vedetään esiin desimaalilukuja ja potensseja, joissa nämä desimaaliluvut ovat eksponentteina, kertomatta sanallakaan, mistä on kysymys. Menettelyn ei oikein voi ajatella tutustuttavan opiskelijaa ”matematiikan ainutlaatuiseen ja kiehtovaan olemukseen”. Rationaalilukueksponenttien mielekkyys ja merkitys olisi edes voitu mainita ja kuvailla! Nyt matematiikka palautuu

empiiriseksi tai havaitsevaksi tieteeksi, havaitsemisen kohteena laskulaite. Logaritmi puolestaan otetaan kummassakin kirjassa käyttöön vain eksponenttiyhtälön ratkaisun merkintätapana, ilman niitä ominaisuuksia, jotka logaritmista käyttökelpoisen tekevät.

Kirjasarjojen ensimmäisten osien vertailu ei tuota mitään paremmuusjärjestystä. Pikemminkin syntyy surullinen mieli siitä, että se, mikä matematiikasta matematiikan tekee, rakenteellisuus, täsmällisyys ja asian looginen eteneminen, tuntuu jääneen piiloon. En näiden perusteella voisi saada kokemusta matematiikasta kiehtovana ja ainutlaatuisena tieteenalana. Mutta kokemuksethan ovat yksilökohtaisia.