

Matematiikan opettamisesta ja vähän matematiikastakin

MATEMATIIKKA – Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Toimittaneet Pekka Räsänen, Pekka Kupari, Timo Ahonen ja Paavo Malinen. Niilo Mäki Instituutti, 2004. 456 s. ISBN 951-39-1940-4. 32 e.

Kahdeksan vuotta sitten luin **Pekka Räsänen, Pekka Kuparin, Timo Ahosen ja Paavo Malisen** toimittaman kirjan, jonka nimi oli *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja tutkimiseen* kirjoitin siitä esittelyn, joka julkaistiin Arkhimedeksen numerossa 2/1998. Lainasin kirjan sitten matemaatikkoystävälleni, ja – niin kuin usein tapahtuu – unohdimme molemmat tapahtuman. Paljon myöhemmin asia tuli esille, ja ystäväni etsiskeli kirjaa työhuoneestaan, jossa oli varsin paljon tavaraa, kirjoja eritoten. Teosta ei koskaan löytynyt. Olin siis maltillisesti iloinen, kun törmäsin hiljattain saman kustantajan samannimiseen kirjaan ja hankinkin sen. Osoittautui kuitenkin, että kirja ei ollutkaan ihan sama, vaan toinen painos. Lähiluku osoitti, että eroja oli kovastikin. Aikaisemmin lukemassani versiossa oli 23 kirjoittajaa, tässä uudemmassa 30. Aikaisemman version kirjoittajista osa on pudonnut pois. Sivumäärä on kasvanut 373:sta 456:een ja artikkeleista osa on jo sisältöön liittyvän aikatiedon nojalla nähtävissä uusiksi. Tällainen toimitustapa tuntuu aika hämmästyttävältä. Eikö uuteen artikkelikokoelmaan olisi löytynyt uutta nimeäkin? No, ainakaan edellistä versiota lukemattomien elämää nämä erot eivät haittaa. Ja esitte-

lystäkin tulee toinen laitos, ei ihan sama muttei ihan erikään kuin edellinen.

Pythagoras ja hänen seuraajansa alkoivat runsaat kaksi tuhatta vuotta sitten nimittää geometriaa ja aritmeetiikkaa *mathesikseksi*, asiaksi joka on opittava. Nykykreikan sana *mathema* tarkoittaa mm. läksyjä. Matematiikka on noista antiikin ammoisista ajoista lähtien kuulunut yleissivistävän koulutuksen kulmakiviin. Se muodosti klassillisen koulun ylemmän osaston, *quadriviumin* ytimen. Ylemmälle tasolle saattoi päästä omaksuttuaan *triviumin*, humanistiset opit. Mitä tarkoittaakaan sana triviaali? Ja viimeistään teollinen vallankumous synnytti tilanteen, jossa matematiikan osaamisesta ja niin muodoin sen opettamisestakin on konkreettista hyötyä. Kaikissa sivistysmaissa matematiikan opetuksen kohderyhmä on ainakin tiettyinä ikäkausina koko väestö.

Matematiikan opetuksen tutkimus ei ole läheskään niin vanhaa toimintaa kuin matematiikan opettaminen. Kun ottaa huomioon sen melkoisen ihmisponnistuksen määrän, joka matematiikankin opettamiseen panostetaan, ei ole ihme, että matematiikan oppimisen mekanismit kiinnostavat ja opetuksen hyötysuhdetta pyritään parantamaan. Monen ihmisten matemaattista tietoutta arviomaan joutuvan käsitys tuntuu olevan, että oppi ei mene riittävässä määrin eikä aina ollenkaan perille.

Opetuksen tutkimus on tieteidenvälistä. Se koskettaa psykologiaa, kasvatustiedettä, sosiologiaa. Voisi ajatella, että matematiikan opetuksen tutkimus koskettaisi myös matemaatiikkaa. Matemaatikon silmin katseltuna näyttää kyllä siltä, että itse matematiikka ei ole opetuksen tutkijoiden ensisijaisia harrastuskohteita. Ymmärrettävääkin tämä on, koska alan tutkimuksen volyymin suuri osa koskee melko nuorten ikäluokkien oppimista ja oppimisvaikeuksia, eikä matemaattinen asiasisältö näissä yhteyksissä voi olla kovin sofistikoitua.

Jokunen vuosikymmen sitten lapsille sanottiinkin opetettavan laskentoa.

Esillä oleva Jyväskylän yliopiston piirissä toimivan *Niilo Mäki Instituutin*, verkkosivunsa mukaan ”oppimisvaikeuksien monitieteisen tutkimuksen ja kehittämistyön yksikön” julkaisema ja kustantama artikkelikokoelma, kokoa takakantensa mukaan ”yleistajuisesti kirjoitettuna viimeisimmän oppimistutkimuksen tiedon Suomesta sekä maailmalta”. Se on ”käsikirja kaikille niille, jotka pyrkivät vastaamaan opettamisen ja koulutuksen uusiin haasteisiin eri koulutuksen tasoilla.” Välttämätöntä lukemista siis sekä matematiikan opettajille että tutkijoille, joutuuhan melkein jokainen matematiikan parissa puuhaava sitä opettamaan.

Mitä lukija saa? Artikkeleita on esipuheen jälkeen 23. Sisällysluettelosta katsoptuna artikkelien pituudet vaihtelevat yhdeksän ja 34 sivun välillä, mediaanipituus on 18, keskipituus 19 ja keskihajonta 7 sivua. 30 kirjoittajasta eniten tilaa on suotu Lenni Haapasalolle, jonka omissa nimissä on sivuista 50. Artikkeleissa on – kahta lukuun ottamatta – lähdeluettelo. Lähdeluettelo teoksessa on kaikkiaan melko tarkkaan 40 sivua, ja kun ne on tiheään painettu, ei arvio 800 viitatusta lähteestä osune kauas totuudesta. Osa näistä on toki lueteltu usean kerran eri artikkeleiden lopussa. Tarkka lukija huomaa artikkeleista viittauksia luetteloista unohtuneisiinkin lähteisiin. Oppinutta väkeä ovat nämä didaktikot.

Kirjoittajien suurin ryhmä muodostuu matematiikan didaktiikan opetus- ja tutkimusvirkojen haltijoista. Mukana on muutama puhdas kasvatustieteilijä ja psykologi, jokunen opettaja ja yksi matematiikan professori.

Mutta mistä he kirjoittavat? Artikkelit ovat heijastusta eri kirjoittajien vaihtelevista mielenkiinnon kohteista. Näin ollen kirjaa on vaikea nähdä takakannen lupaamana käsikirjana. Useat lähestyvät melko filosofisesti peruskysymystä siitä, mitä op-

piminen oikein on. **Raija ja Yrjö Yrjönsuuri** näyttävät pääsevän asian ytimeen: ”Oppimiseksi kutsumme selaista sisäistä prosessia, jossa yksilön valmius intentionaaliseen toimintaan uudistuu.” Tämä joko on tai ei ole samaa kuin mitä vallalla olevan teoria, *konstruktivismi*, sanoo. Sen mukaan oppija konstruoi oppinsa itse, omista rakennuspuistaan. Opetus ikään kuin pyrkii antamaan tälle rakennustyölle piirustuksia ja ohjeita. Monen kirjoittajan kiinnostuksen kohteena ovat näin ollen ne väärinkäsitykset ja uskomukset, joiden vallassa matematiikkaa opiskelevat näyttävät olevan. Lukija ei voi aika ajoin olla ihmettelemättä sitä arvoa, johon opetuksen tutkijat nämä ilmeisesti opetuksen avulla hävitettäväksi tarkoitetut ajatukset asettavat. Niitä keksitään nimitettäväksi esimerkiksi ”miniteorioiksi”. Opetuksen ja kasvatustieteen saloihin vihkiytymätön voi ajatella, että lakaisukoneen käyttäjää kiinnostaa hyvä työnjälki enemmän kuin pois lakaistavien roskien tarkka koostumus.

Kirja on ilmestynyt ennen viimeistä PISA-tutkimusta. Näin ollen kansainvälisten vertailuarviointien esittely ei ole kirjassa kovin voimakkaasti esillä. Pekka Kupari ja **Jukka Törnroos** esittelevät edellisen PISA-tutkimuksen tuloksista tutkimuksessa kerätyn taustamuuttuja-aineiston yhteyksiä oppilaiden suorituksiin. Tulokset eivät kovinkaan yllätä.

Matemaatikko lukee kasvatustieteellistä teosta helposti samalla periaatteella kuin sielunvihollinen Raamattua. Tätä taustaa vasten vielä muutama lisähavainto.

Kuparin ja Törnroosin kirjoituksen ohella teoksessa on varsinaisesti kaksi tilastollisen tutkimuksen esittelyä. Matemaattikolukija jää hiukan kummastelemaan joitain yksityiskohdita. **Jarkko Hautamäki** ja **Jorma Kuusela** pohdiskelevat mahdollisuuksia tunnistaa erityisopetusta tarvitseva diagnostisen kokeen pisteistä. Matemaattikolukijaa ihmetyttää kirjoittajien hämmennys koepis-

teiden normalisoinnin äärellä: normalisoinnin jälkeen kun jakauma onkin ihan samanlainen kuin ennen. Tämän yllätyksen kirjoittajat dokumentoivat asettamalla kokeensa pistejakaumakuvaajat, jotka tietysti ovat ihan samanmuotoiset, rinnakkain. **Kaarina Merenheimo** ja **Erkki Pehkonen** puolestaan analysoivat kehittynein tilastollisin menetelmin Turussa luokanopettajankoulutukseen pyrkiville järjestettyjä testejä. Eri vaiheissa aineistoille on tehty merkitsevyydestauksia, joiden numeeriset tulokset on pudotettu ilman kummempia perusteluja artikkeliin.

Toki enemmän matemaatikkolukija ihmettelee useiden artikkelien kirjoitustapaa. Lähes jokaisessa, aika käytännöllisaiheisessa artikkelissa on teoriajohdanto, jossa tutkimus asetetaan paikalleen alan kirjallisuusavaruudessa. Lainataan näytteeksi **Raimo Kaasilan**, **Anu Laineen** ja **Erkki Pehkonen** artikkelia Luokanopettajiksi opiskelevien matematiikkakuva ja sen muuttuminen: ”Matematiikkakuva ja siihen liittyvät uskomukset toimivat siten ikään kuin suodattimena opiskelijan ajattelussa hänen osallistuessaan opintoihin (Pehkonen 1998). Ne voivat vaikuttaa esimerkiksi siihen, kuinka opiskelijat osallistuvat opetukseen ja ymmärtävät matematiikkaa (Foss & Kleinsasser, 1996). Koska matematiikkakuva on usein myös hyvin tunneväritteinen, se vaikuttaa opiskelijoiden tapaan lähestyä opettamaan opiskelemista (vrt. Ball, 1990).” – Jokainen edellisistä kolmesta peräkkäisestä virkkeestä tuntuu aivan arkisen uskottavalta, eikä lukijassa heräisi vastaväitettä, vaikka niiden tueksi ei olisikaan haettu kirjallista auktoriteettia. Ja tuen löytäminen juuri näille ajatuksille viitteistä olisi varmaan aika työlästä, kun tarkempaa sivunumeroa ei kuitenkaan ole näkyvissä. Kerettiläinen ja pahan tahtoinen ajattelija kehittää tästä miniteorian, jonka sisältö on se, että viittaukset ovat isetarkoituksellisia, että on arvokasta osoittaa lukeneensa ulkomaalaisia teoksia.

Juuri mainitun artikkelin lisäksi usea muukin kirjoitus asettuu luokanopettajankoulutuksen ympäristöön. Tämä on toki sikälikin ymmärrettävää, että usean matematiikan didaktiikan ammattilaisen työpaikkana on luokanopettajankoulutusyksikkö. Artikkelien viesti, ainakin rivien välistä lukiin, vahvistaa monesti lausuttua pelkoa siitä, että lastemme ensimmäisten kouluvuosien laskennonopetus on usein uskottu ihmisille, joiden asenne matematiikkaa kohtaan ja matematiikan osaaminen jättävät kauniisti sanottuna runsaasti toivomisen varaa. Ja vaikka, niin kuin muutamasta artikkelista voi lukea, energinen opettajankoulutuslaitoksen opettaja saa omaa opetustaan koskevaan tutkimukseensa omilta oppilailtaan lausumia, joiden mukaan matematiikan tuottamat haasteet on saatu voitettuihin, niin tähänkään ei ilkeä lukija aina uskalla ihan luottaa, todistaja kun ei ole jäävi.

Näiden hieman kriittisiä reaktioita lukijassa nostattaneiden artikkeleiden ohella kirjassa on paljon arvioijaa miellyttävääkin. Emeritusprofessori PaaVo Malinen kaipaa hyvin perustellen todistamista takaisin koulumatematiikkaan. **Tapio Kerantokin**, tosin ylenmääräisten kirjallisuusviitteiden tukemana, esittää kriittisen ajattelun lisäämistä kouluun. **Markku S. Hannula**, **Pekka Kupari**, **Leila Pehkonen**, **Pekka Räsänen** ja **Riitta Soro** esittävät runsaasti todistusaineistoa sen puolesta, että tyttöjen ja poikien erot matematiikassa ovat pitkälti luoteltuja.

Teoksen todellinen helmi on kuitenkin sen viimeinen artikkeli, teoksen ainoan matemaatikkokirjoittajan, **Tuomas Sorvalin** Matematiikan opettajankoulutuksen kehittämistä. Lähdeviitteisiin takertumatta Sorvali ottaa tyylikkäässä kirjoituksessaan esiin **Rolf Nevanlinnan** esittämän ajatuksen matematiikan olennaisesta kahtiajaosta: toisaalta matematiikka on arkielämään sopeutuva luonnon-tiede, joka sellaisenaan ei ole kovin kiinnostava, toisaalta kirkas deduktii-

vinen rakennus, sellaisena ihmiskunnan hienoimpia saavutuksia. Tämä jälkimmäinen matematiikka ei juuri ole didaktikkojen artikkelikokoelman aiheena. Sorvali näkee että koko tai lähes koko ikäluokalle kohdistuva koulutus ei voi sisältää muuta kuin edellisenlaista matematiikkaa, siis laskentaa ja mittausoppia, kun taas matematiikka tieteenä tavoittelee ja noudattaa jälkimmäistä paradigmat. Sorvalin päällimmäinen ongelma on opettajien, lähinnä aineenopettajien koulutuksen ristiriita. Yliopistojen todistava matematiikka on sisään tulevalle opiskelijalle nyt perin outoa ja yliopistosta poistuva opettaja kohtaa koulussa aivan toisen matematiikan. Tämän kirjoittaja ei osaa pitää täyttenä mahdollisuutena sitä, että todistaminen vaikkapa euklidisen geometrian muodossa vastakin olisi koulussa esillä.

Esillä olevan kirjan loppuun on jostain syystä kirjoitettu kronologinen luettelo suomalaisten matematiikan didaktikkojen väitöskirjoista. Luettelossa on 29 teosta ja se alkaa **Aatu Nykäsen** 5. toukokuuta 1945 Helsingin yliopistossa puolustamasta alkeisgeometrian oppikirjoja käsitteestä tutkimuksesta. Luettelossa on lisäksi kahden didaktikon (**Erkki Pehkonen** ja **Lenni Haapasalo**) varsinaisen matematiikan väitöskirjat ja neljä muun alan teosta, joista yhden nimi kuitenkin on *An item analysis of tests in mathematics applying logistic test models*. Tuomas Sorvalia ei ole luokiteltu didaktikoksi, koskapa hänen epäjatkuvia ryhmiä käsitellyttä väitöskirjaansa ei mainita.

Opetanko Niilo Mäki Instituutin (voi miten kaipaankaan tuohon nimeen yhdysmerkkiä, mutta siinä ei sitä ole) kirjan luettuaani paremmin kuin ennen? Ryhdyn sitä tarkkailemaan, ja jos kirja vielä ilmestyy samannimisenä mutta uutena, tarjoan havaintoni julkaistaviksi.

Matti Lehtinen
Maanpuolustuskorkeakoulu