

Den nionde nordiska matematiktävlingen

Matti Lehtinen

Försvarshögskolan

Box 266

FIN-00171 Helsingfors

E-mail: mtlehtin@cc.helsinki.fi

Den nionde nordiska matematiktävlingen ägde rum den 15 mars 1995, med Finland som arrangörsländ. Tävlningen genomfördes som vanligt i deltagarnas egna skolor i form av en skrivning med fyra problem som borde lösas i fyra timmars tid. Svarpappren granskades först av de nationella kommittéerna i de deltagande fem länder, och resultaten koordinerades av den finska kommittén (Kerkko Luosto, Jari Lappalainen och Matti Lehtinen).

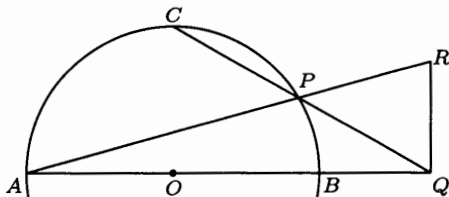
Sammanlagt deltog 69 gymnasieungdomar från de fem nordiska länderna. Tävlningen tycks ha varit ganska men inte alltför svår: ingen av deltagarna nådde maximalpoängtalet 20 och medianpoängtalet var 7. De genomsnittliga poängtalerna i enskilda problem var 2,81 i den första uppgiften, 3,84 i den andra, 0,89 i den tredje och 1,06 i den fjärde.

De tolv bästa resultaten i tävlingen:

1	Uoti Urpala	Finland	18
2	Marcus Better	Sverige	16
3	Tuomas Korppi	Finland	15
	Jacob Norda	Sverige	15
	Hans Rullgård	Sverige	15
6	Ola Samnegård	Sverige	14
7	Oddmar Eiksund	Norge	13
8	Milena Anguelova	Sverige	12
	Bennet Haselton	Danmark	12
	Rafael Pass	Sverige	12
	Søren Schmidt	Danmark	12
	Jukka Zitting	Finland	12

Tävlingsproblem och lösningar

Problem 1. Låt AB vara en diameter i en cirkel med medelpunkt O . Välj en punkt C på cirkeln sådan att OC är vinkelrät mot AB . Låt P vara en godtycklig punkt på cirkeln mellan C och B och låt linjerna CP och AB skära varandra i punkten Q . Välj R på linjen AP så att RQ och AB är vinkelräta. Visa att $|BQ| = |QR|$.



Lösning: Dra PB . Då är på grund av Thales' teorem $\angle RPB = \angle APB = 90^\circ$, och både P och Q ligger på cirkeln med diametern BR . Eftersom $\angle AOC = 90^\circ$, är $\angle RPQ = \angle CPA = 45^\circ$. Men då är $\angle RBQ = 45^\circ$, och RBQ är en likbent rätvinklig triangel, det vill säga $|BQ| = |QR|$.

Problem 2. Vid kodning av meddelanden används följder av nollor och ettor. Endast följder med högst två på varandra följande nollor eller ettor är tillåtna. (Exempelvis är följderna 011001 tillåtna, men inte 011101.) Bestäm antalet tillåtna följder med exakt 12 siffror.

Lösning: Varje sätt att representera 12 som en ordnad summa av ettor och tvåor motsvarar exakt två tillåtna följder (man kan börja följderna med en nolla eller en etta). Antalet summor med 12 ettor är 1, antalet summor med en tvåa och 10 ettor är $\binom{11}{10}$ (det vill säga antalet alternativ att välja de 10 ettorna bland summans 11 termer) osv. Sålunda är antalet tillåtna följder lika med

$$2 \cdot \sum_{k=0}^6 \binom{12-k}{2k} = 2 \cdot (1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1) = 466.$$

Problem 3. Låt $n \geq 2$ och låt x_1, x_2, \dots, x_n vara reella tal för vilka $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0$ och $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Sätt $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Visa att

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Avgör om likhet kan inträffa.

Lösning: Vi antecknar med I mängden av sådana i för vilka $x_i \geq 0$ och med J mängden av de i för vilka $x_i < 0$. Anta $M < \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$. Då är $I \neq \{1, 2, \dots, n\}$,

eftersom annars $|x_i| = x_i \leq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ för varje i , och $\sum_{i=1}^n x_i^2 < \frac{1}{n-1} \leq 1$. Så

$$\sum_{i \in I} x_i^2 < (n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \text{ och } \sum_{i \in I} x_i < (n-1) \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Eftersom

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i \in I} x_i - \sum_{i \in J} |x_i|,$$

får vi $\sum_{i \in J} |x_i| \leq \sum_{i \in I} x_i < \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ och $\sum_{i \in J} x_i^2 \leq (\sum_{i \in J} |x_i|)^2 < \frac{n-1}{n}$. Men då är

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i \in I} x_i^2 + \sum_{i \in J} x_i^2 < \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1,$$

och vi har en motsägelse. För att se, att likheten $M = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ är möjlig, väljer

vi $x_i = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, och $x_n = -\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. Då är det klart, att

$$\sum_{i=1}^n x_i = (n-1) \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} = 0 \text{ och } \sum_{i=1}^n x_i^2 = (n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

Problem 4. Visa att det finns ett oändligt antal icke kongruenta trianglar T sådana att:

(i) Sidolängderna i T är på varandra följande heltal.

(ii) Arealen av T är ett heltal.

Lösning: För varje $n \geq 3$ utgör $n-1, n, n+1$ sidorna av en triangel. Den halva perimetern av den här triangeln är $3n/2$. På grund av Herons formel är arean av triangeln

$$T = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right) \left(\frac{3n}{2} - n\right) \left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(n^2 - 4)}.$$

Om $n = 4$, är $T = 6$. Åtminstone en triangel uppfyller alltså problemets villkor.

Anta nu att n är ett jämnt tal för vilket $\frac{3}{4}(n^2 - 4)$ är en kvadrat. Sätt $m = n^2 - 2 > n$. Då är m jämnt och $m^2 - 4 = (m+2)(m-2) = n^2(n^2 - 4)$, och sålunda är $\frac{3}{4}(m^2 - 4)$ en kvadrat och $T = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(m^2 - 4)}$ är ett heltal. Det bevisar utsagan.