Matti Lehtinen

34. Matematiikkaolympialaiset Istanbulissa

Suomen joukkue ekskursiolla Büyükadan saarella. Vasemmalta Matti Lehtinen, Kaarlo Väisänen, Simo Suhonen, Lari Rajantie, Kerkko Luosto, Juha Lemmetti, Ilkka Alasaarela, joukkueen opas Kürsat Demirkol ja Sirpa Taskinen.

Matematiikan olympiavalmennus alkoi totuttuun tapaan syksyn 1992 valtakunnallisesta lukion matematiikkakilpailusta. Kirjevalmennusosuuteen valittiin MAOLin valtakunnallisen lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan 29 parasta ja perussarjan 21 parasta. Ensimmäinen valmennuskirje postitettiin joulun alla 1992, ja aktiivisimmat ehtivät saada viisi valmennuskirjettä. Valmennuksesta huolehtivat FT *Kerkko Luosto* Helsingin yliopistosta ja kirjoittaja.

Valmennettavista 18 aktiivisinta osallistui seitsemänteen pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, joka pidettiin 17. maaliskuuta 1993. Kilpailun pohjoismaiden kesken kiertävä järjestämisvastuu oli tällä kertaa Norjalla. Yhteensä 68:n kaikkia viittä pohjoismaata edustaneen kilpailijan joukossa parhaat suomalaiset olivat *Lari Rajantie* (Ressun lukio) jaetulla kolmannella sijalla, *Jaakko Kangasharju* (Myyrmäen lukio) ja *Ville Voipio* (Helsingin Suomalainen Yhteiskoulu) 8:nnella sijalla, *Juha Lemmetti* (Tampereen lyseo) ja *Kaarlo Väisänen* (Helsingin Suomalainen Yhteiskoulu) 12:nnella sekä *Ari Savolainen* (Utajärven lukio) ja *Simo Suhonen* (Sipoon Lukio) 26:nnella sijalla. Matematiikkaolympialaisia ennakoiva kunkin maan kuuden parhaan pisteiden yhteenlasku antoi Suomelle peräti toisen tilan, Tanskan jälkeen.

Olympiavalmennettavista 12:lle pidettiin 7. - 10. kesäkuuta 1993 valmennustilaisuus Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen tiloissa. Valmennustilaisuudessa pidettyjen kokeiden, aikaisemman kilpailumenestyksen ja valmennuksen yhteydessä saadun arvioinnin perusteella olympiajoukkueeseen valittiin *Ilkka Alasaarela* (Kastellin lukio, Oulu), Juha Lemmetti, Lari Rajantie, Simo Suhonen, *Sirpa Taskinen* (Vantaanjoen lukio) ja Kaarlo Väisänen. Joukkueen johtajana toimi Matti Lehtinen ja varajohtajana Kerkko Luosto.

34. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Istanbulissa 13. - 24. heinäkuuta 1993. Kilpailujen järjestelyt hoiti Turkin teknis-tieteellinen tutkimusneuvosto TÜBITAK yhdessä Turkin matemaattisen yhdistyksen kanssa. Järjestelyt oli tehty huolella, työtä ja rahaa säästämättä, ja ne olivat kaikin puolin onnistuneet. Kilpailujoukkueita oli kaikkiaan 73 maasta. Tämä samoin kuin kilpailijoiden yhteismäärä 413 on uusi ennätys ja osoittaa matematiikkaolympialaisten yleismaailmallisen arvostuksen jatkuvaa kasvua. Mm. kaikki Euroopan maat ovat nyt mukana matematiikkaolympialaisissa (Istanbulista olivat kuitenkin poliittisten syiden vuoksi poissa Kreikka, Kypros ja Jugoslavia; kaksi ensin mainittua siksi, että kilpailuihin osallistui joukkue Kyproksen turkkilaisesta osasta)

Joukkueenjohtajat kokoontuivat Istanbuliin laatimaan kilpailun tehtäväsarjaa 13. heinäkuuta, ja joukkueet saapuivat Istanbuliin varajohtajien kera 16. heinäkuuta. Kilpailun avajaiset pidettiin Turkin varapääministeri Erdal Inönün läsnäollessa Istanbulin Atatürk-kulttuurikeskuksessa 17. heinäkuuta ja itse kokeet Ataköyn turistikeskuksessa Istanbulin laitamilla 18. ja 19. heinäkuuta. Palkintojenjako ja päättäjäiset pidettiin 23. heinäkuuta

Atatürk-keskuksessa. Kilpailupäivien ulkopuolelle jäävänä aikana kilpailijoille järjestettiin monipuolista tutustumisohjelmaa Istanbulissa ja sen lähiympäristössä. Turkin kurdiongelman vuoksi

Tehtävät

1. Olkoon $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, missä $n > 1$ on kokonaisluku. Osoita, että $f(x)$ ei voi olla kahden kokonaislukukertoimisen ja vähintään astetta 1 olevan polynomin tulo.

2. Olkoon D teräväkulmaisen kolmion ABC sisäpiste, joka toteuttaa ehdot $\angle ADB = \angle ACB + 90°$ ja $AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

(a) Laske suhteen $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$ arvo.

(b) Todista, että kolmioiden ACD ja BCD ympäri piirrettyjen ympyröiden pisteeseen C piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

3. Äärettömällä šakkilaudalla pelataan seuraavaa peliä. Pelin alussa laudalla on n^2 nappulaa, jotka on sijoitettu $n \times n$:n vierekkäisen ruudun muodostamaan neliöön, yksi kuhunkin ruutuun. Pelin siirto on hyppy vaaka- tai pystysuunnassa sellaisen ruudun yli, jossa on nappula, viereiseen tyhjään ruutuun. Nappula, jonka yli on hypätty, poistetaan laudalta. määritä ne n:n arvot, joilla peli voi loppua niin, että laudalle jää vain yksi nappula.

4. Jos P, Q ja R ovat kolme tason pistettä, niin määritellään $m(PQR)$ kolmion PQR korkeusjanojen minimipituudeksi (ja jos P, Q ja R ovat samalla suoralla, asetetaan $m(PQR) = 0$). Olkoot A, B ja C kolme annettua tason pistettä. Todista, että jokaiselle tason pisteelle X pätee

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

5. Olkoon $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Selvitä, onko olemassa funktiota $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(1) = 2$, $f(f(n)) = f(n) + n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $f(n) < f(n+1)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

6. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. n lamppua $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ on järjestetty ympyrään. Jokainen lamppu joko palaa tai on sammuksissa. Suoritetaan jono operaatioita S_0, $S_1, \ldots, S_i, \ldots$. Operaatio S_j vaikuttaa vain lamppuun L_j (eikä muihin lamppuihin) seuraavasti: Jos L_{j-1} palaa, niin S_j vaihtaa L_j:n tilan (sytyttää tai sammuttaa sen). Jos L_{j-1} on sammuksissa, S_j pitää L_j:n tilan ennallaan. Lamput on numeroitu modulo n siten, että $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ jne. Aluksi kaikki lamput palavat. Osoita, että

(a) on olemassa positiivinen kokonaisluku $M(n)$ siten, että $M(n)$:n operaation jälkeen kaikki lamput palavat jälleen;

(b) jos n on muotoa 2^k, niin kaikki lamput palavat $n^2 - 1$:n operaation jälkeen;

(c) jos n on muotoa $2^k + 1$, niin kaikki lamput palavat $n^2 - n + 1$:n operaation jälkeen.

kiristynyt tilanne ei kilpailuissa tullut esiin muuten kuin poikkeuksellisen runsaina ja näkyvinä turvallisuusjärjestelyinä.

Olympialaisissa jaettiin 35 ensimmäistä, 67 toista ja 98 kolmatta palkintoa. Kilpailutehtävät olivat jonkin verran totuttua vaikeampia, joten palkintosuoritukseen tarvittavat pistemäärät jäivät normaalia alhaisemmiksi. Etenkin tehtävä 3, Kerkko Luoston keksimä ja Suomen esittämä, tuotti vaikeuksia hyvinkin harjoitelleille joukkueille. Täysin oikeat suoritukset kaikkiin tehtäviin löytyivät vain kahdelta kilpailijalta, joista toinen oli Kiinasta, toinen Taiwanista. Ensimmäisistä palkinnoista kuusi tuli Kiinaan, ja Kiina sai myös ylivoimaisesti eniten pisteitä maiden välisessä epävirallisessa joukkuekilpailussa. Seuraavilla sijoilla olivat Saksa, Bulgaria, Venäjä, Taiwan, Iran, USA, Unkari, Vietnam ja Tsekki.

Suomen menestys oli jälleen erittäin vaatimaton. Yhtäkään suomalaista ei palkittu mitalilla, ja maiden välisessä pistekilpailussa Suomi oli 52, Pohjoismaista nyt neljäntenä. Jos haluaa, niin tätäkin voidaan pitää lievästi myönteisenä kehityksenä, koska edellisen vuoden kilpailussa Suomen vastaava sijoitus oli 54. 62:n osallistujamaan joukossa. Henkilökohtaisessa tulosluettelossa parhaat suomalaiset (Alasaarela, Lemmetti ja Rajantie) olivat sijalla 251.

Sinänsä erinomaisesti onnistuneisiin kilpailuihin liittyi muutamia ikävämpiäkin piirteitä. Yksi kilpailija hylättiin muistiinpanojen käyttämisen takia ja kahdelta laskinta käyttäneeltä riistettiin toisen kilpailupäivän pisteet. Jo mainittu Suomen esittämä tehtävä 3 aiheutti pitkän keskustelun. Tehtävien valintavaiheessa se oli tuomariston suosikki ja se sai taakseen suurimman äänimäärän tehtäväsarjaa valittaessa. Sittemmin osoittautui, että lähestulkoon sama tehtävä oli esitetty Itsenäisten valtioiden yhteisön matematiikkaolympialaisissa Alma-Atassa huhtikuussa 1992. Osa tuomaristoa olisi halunnut rankaista tehtävien valintavaiheessa huonomuistisiksi osoittautuneita jäseniään, etenkin Venäjän edustajaa (joka ei jostain syystä ollut läsnä tehtävien valintavaiheessa). - Itse asiassa Alma-Atan kilpailun tehtävät oli jaettu kaikille matematiikkaolympialaisten tuomariston jäsenille jo vuosi sitten, ja kyseinen tehtävä löytyi olympialaisten jälkeen kirjoittajankin arkistosta. Tapahtumasarja osoittaa tuoreiden tehtävien löytämisen hankaloituvan vuosi vuodelta. Erilaisia matematiikkakilpailuja järjestetään vuosittain satoja.

Seuraavat matematiikkaolympialaiset pidetään Hongkongissa 8. - 20. heinäkuuta 1994. Sen jälkeen olympialaisten järjestämisvuorossa ovat Kanada, Intia, Argentiina, Japani ja Romania. ❑

Ratkaisut

1. Oletetaan, että $f(x) = g(x)h(x)$, missä g ja h ovat kokonaislukukertoimisia ainakin ensimmäistä astetta olevia polynomeja. Silloin $g(0)h(0) = 3$, joten $g(0)$:n ja $h(0)$:n mahdolliset arvot ovat ± 1 ja ± 3. Oletetaan, että $g(0) = \pm 1$. Voidaan olettaa, että $g(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x \pm 1$. Koska $f(\pm 1) \neq 0$, niin $k > 1$. Olkoot x_1, x_2, $\ldots$, x_k yhtälön $g(x) = 0$ (kompleksiset) ratkaisut. Silloin $|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k| = 1$. Koska luvut x_j ovat yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisuja, niin $x_j^{n-1}(x_j + 5) = -3$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Kun nämä k yhtälöä kerrotaan keskenään, saadaan $|(x_1+5)(x_2+5) \cdot \ldots \cdot (x_k+5)| = 3^k$ eli $|g(-5)| = 3^k$. Toisaalta $g(-5)$ on luvun $f(-5) = 3$ tekijä, joten $|g(-5)| = 1$ tai $|g(-5)| = 3$. Saatu ristiriita osoittaa ratkaisun alussa tehdyn oletuksen virheelliseksi, joten tehtävän väite on tullut todistetuksi.

2. (a) Piirretään jana DE niin, että $DE = DB$ ja $DE \perp DB$. Silloin $\angle ADE = \angle ACB$ ja $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{DE}{BC}$, joten kolmiot ADE ja ACB ovat yhdenmuotoiset (sks). Täten $\angle CAB = \angle DAE$ ja $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$. Edelleen $\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \angle DAE - \angle DAB = \angle BAE$. Myös kolmiot CAD ja BAE ovat yhdenmuotoiset (sks). Koska BDE on tasakylkinen suorakulmainen kolmio, $BE = \sqrt{2}BD$. Saadaan siis $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BE} = \dfrac{CD}{\sqrt{2}BD}$, josta $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$.

(b) Olkoot CT ja CU kolmioiden ACD ja BCD ympäri piirrettyjen ympyröiden pisteeseen C piirrettyjä tangentteja. Silloin $\angle DCT = \angle DAC$ ja $\angle DCU = \angle DBC$ samoja kaaria vastaavina tangentti- ja kehäkulmina. Kolmion ABD kulmasummasta saadaan $\angle ADE + \angle DAB + \angle DBA + 90^\circ = 180^\circ$. Koska $\angle ADE = \angle ACB$, on edelleen $\angle ACB + \angle CAB - \angle CAD + \angle ABC - \angle DBC = 90^\circ$. Kun otetaan huomioon kolmion ABC kulmasumma, saadaan haluttu relaatio $90^\circ = \angle CAD + \angle DBC = \angle DCU + \angle DCT = \angle UCT$.

3. Väritetään šakkilaudan ruudut kolmella värillä A, B ja C niin, että kussakin "alhaalta vasemmalta" "ylös oikealle" kulkevassa vinorivissä ruudut ovat samanväriset ja vinorivien värit seuraavat toisiaan samassa järjestyksessä. Oletetaan, että nappuloiden alkuasentoneliön lävistäjärivi on väriä A. Symmetrian perusteella B- ja C-värisillä ruuduilla on alkuasemassa yhtä monta nappulaa. Jos $n = 3k$, niin A-värisillä ruuduilla on alkuasemassa

$$3k + 2((3k-3) + (3k-6) + \ldots + 3) = 3k + 2 \cdot 3\frac{k(k-1)}{2} = 3k^2 = \frac{1}{3}n^2$$

nappulaa; alkuasemassa on tällöin yhtä monta nappulaa jokaisella kolmella värillä väritetyissä ruuduissa. Jokainen pelin siirto muuttaa kunkin värisillä ruuduilla olevien nappuloiden määrän parillisuuden: siirto poistaa kahdelta eriväriseltä ruudulta nappulan ja lisää yhden nappulan kolmannelle värille. Loppuasemassa yhden värin nappulamäärä on pariton ja kahden muun parillinen. Koska alkuasemassa kaikilla väreillä oli sama nappulamäärä, peli ei voi onnistua.
Olkoon sitten n jaoton kolmella. Jos $n = 2$, peli saadaan onnistumaan. Helposti nähdään myös, että neljästä ruudusta muodostuvan L:n muotoisen kuvion kolmesta vierekkäin olevasta ruudusta voidaan kolmella siirrolla poistaa nappulat, jos L:n lyhyemmässä sakarassa olevalla nappulalla voidaan tehdä ensimmäinen siirto. Lisäksi 2×3-suorakaiteessa olevat kolme kuusi nappulaa voidaan poistaa esimerkiksi silloin, kun suorakaiteen kahdella pitkän ja yhden lyhyen sivun vierekkäiset ruudut ovat tyhjiä ja ainakin toinen toiseen lyhyeen sivuun rajoittuvista ruuduista on miehitetty. Näitä operaatioita toistamalla nähdään, että peli onnistuu, kun $n = 4$ ja $n = 5$. Kun $n > 6$, samoja operaatioita toistamalla päästään tilanteeseen, jossa nappulat ovat $(n-3) \times (n-3)$-neliössä. Toistamalla tarvittaessa samat operaatiot saadaan tilanne palautetuksi 4×4- tai 5×5-neliöön. Peli onnistuu siis aina ja vain, kun n ei ole jaollinen kolmella.

4. Olkoot A_1 ja A_2 mielivaltaisia tason pisteitä ja $r < A_1A_2$. Selvitetään ensin, millainen on niiden pisteiden X joukko $E(A_1, A_2, r)$, joille pätee $m(XA_1A_2) \leq r$. Jos K_1 ja K_2 ovat A_1- ja A_2-keskiset r-säteiset ympyrät t_1 ja t_2 ympyröiden K_1 ja K_2 yhdensuuntaiset yhteiset tangentit ja t_1', t_1'' sekä t_2', t_2'' ympyrän pisteen A_1 kautta kulkevat ympyrän K_2 sekä pisteen A_2 kautta kulkevat ympyrän K_1 tangentit, niin kyseinen joukko muodostuu suorien t_1 ja t_2 väliin jäävästä yhdensuuntaisvyöstä ja kulmista $t_1'A_1t_2''$ sekä $t_2'A_2t_2''$ Jos M_1 on tangenttien t_1 ja t_1' leikkauspiste, niin helppo kehäkulmatarkastelu osoittaa, että kolmio $A_1A_2M_1$ on tasakylkinen, eli $A_1M_1 = A_1A_2$. Joukkoa $E(r)$ rajoittavien murtoviivojen kärkipisteet ovat siis A_1A_2:sta etäisyydellä r olevilla suorilla ja A_1- sekä A_2-keskisillä A_1A_2-säteisillä ympyröillä.

Olkoon sitten ABC tehtävän kolmio; ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että AB on sen pisin sivu; merkitään $r = m(ABC)$. Suorat AB, BC ja CD jakavat tason seitsemään osaan, joista yksi on kolmio G_{ABC} eli kolmio ABC, ja kolme sellaisia kulmia, joiden kärki on jokin kolmion kärki. Olkoot nämä alueet G_A, G_B ja G_C. Loput kolme aluetta ovat kahden puolisäteen ja yhden kolmion sivun rajoittamia alueita; olkoot ne G_{AB}, G_{BC} ja G_{AC}. Kukin alue sisältää myös reunansa. Jaetaan tarkastelu tapauksiin sen mukaan, missä piste X sijaitsee. (a) Piste X on kolmion ABC sisällä (tai reunalla). Jos $|PQR|$ on kolmion PQR ala ja |PQ| janan PQ pituus, niin $|ABC| = |ABX| + |AXC| + |ABC|$. Jaetaan tämä yhtälö puolittain $|AB|$:llä. Koska $|AB| \geq |AX|$, $|AB| \geq |BX|$, niin

$$m(ABC) \leq m(ABX) + \frac{2|AXC|}{|AB|} + \frac{2|XBC|}{|AB|}. \qquad (1)$$

Selvästi $2|PQR| = m(PQR) \cdot \max\{|PQ|, |QR|, |RP|\}$. Koska AB on ainakin yhtä pitkä kuin kolmioiden AXC ja XBC pisin sivu, niin epäyhtälön (1) oikean puolen kaksi viimeistä yhteenlaskettavaa ovat enintään $m(AXC)$ ja $m(XBC)$. Väite on tässä tapauksessa todistettu. (b) Piste X on alueessa G_C. Koska $m(ABC) = r$ on pisteestä C piirretyn korkeusjanan pituus, ja $|AC| \leq |AB|$, $|BC| \leq |AB|$, niin piste C ja alue G_C on joukon $E(A, B, r)$ osajoukko. (c) Piste X on joukossa G_A. Koska suora AB on C-keskisen r-säteisen ympyrän tangentti, kulma G_A on joukon $E(B, C, r)$ osajoukko, joten $m(ABC) = r \leq m(XBC)$. Väite pätee; symmetrian takia väite pätee myös, kun $X \in G_B$. (d) Piste X on alueessa G_{AB}. Leikatkoon XC janan AB pisteessä Y. Kohtien (b) ja (c) perusteella $m(AYC) \leq m(AXC)$ ja $m(BCY) \leq m(BCX)$. Lisäksi $m(ABY) = 0$. Koska $y \in G_{ABC}$, $m(ABC) \leq m(ABY) + m(AYC) + m(YBC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$. Päättely tapauksissa $X \in G_{BC}$ ja $X \in G_{AC}$ on sama.

5. Olkoon $r = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, $1{,}6 < r < 1{,}7$, yhtälön $r^2 = r + 1$ positiivinen juuri. Silloin funktiolle $g(x) = rx$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$ $g(g(n)) = r^2 n = rn + n = g(n) + n$. $g(n)$ ei kuitenkaan ole kokonaisluku. Asetetaan $f(n) = \left[g(n) + \frac{1}{2}\right]$. Silloin $f(1) = \left[r + \frac{1}{2}\right] = 2$. Koska $r > 1$, niin $g(n+1) > g(n) + 1$, mistä seuraa, että myös $f(n+1) > f(n)$. On vielä osoitettava, että f toteuttaa tehtävän keskimmäisen ehdon. Tämä seuraa siitä, että $f(f(n)) - f(n) - n$ on kokonaisluku, $|g(n) - f(n)| < \frac{1}{2}$ ja

$$\begin{aligned}
|f(f(n)) - f(n) - n| &= |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)| = \\
|f(f(n)) - g(g(n)) + g(n) - f(n)| &= |g(f(n)) - g(g(n)) + f(f(n)) - g(f(n)) + g(n) - f(n)| \\
&= |(1-r)(g(n) - f(n) + f(f(n)) - g(f(n))| \leq \frac{1}{2}(r-1) + \frac{1}{2} = \frac{r}{2} < 1.
\end{aligned}$$

6. Ajatellaan lamppuja kierrettävän n:ssä paikassa T_0, T_1, jne. niin, että operaatiota S_j tehtäessä lamppu L_j on paikassa T_0. Olkoon v_j 0 tai 1 sen mukaan, onko paikassa T_j sammuksissa oleva vai palava lamppu. Operaatio S_j merkitsee, että v_0 korvataan luvulla $v_0 + v_{n-1} (\bmod 2)$ ja kierto sitä, että v_j:n tilalle tulee v_{j+1}. Liitetään lamppujen tilaan kullakin hetkellä polynomi

$$P(x) = v_{n-2} + v_{n-3}x + \ldots + v_0 x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1}.$$

Operaatio ja kierto merkitsevät, että polynomi muuttuu muotoon

$$Q(x) = v_{n-1} + v_{n-2}x + \ldots + (v_0 + v_{n-1})x^{n-1}.$$

Jos käytetään polynomikongruenssimerkintää $p(x) \equiv q(x) \bmod r(x)$, jos $p(x) - q(x)$ on polynomin r monikerta ja lasketaan kertoimilla modulo 2, niin operaatio ja kierto merkitsevät, että $Q(x) \equiv xP(x) \bmod x^n + x^{n-1} + 1$. Käytetään tämän jälkeen $\equiv$-merkkiä tarkoittamaan polynomikongruenssia $\bmod x^n + x^{n-1} + 1$. (a)-kohdan todistamiseksi riittää löytää $M(n)$ siten, että $x^{M(n)} \equiv 1$. Koska tarkasteltavan kongruenssin ekvivalenssiluokkien määrä on äärellinen, on oltava $x^q \equiv x^r$ joillakin kokonaisluvuilla $q < r$. Mutta silloin $x^{r-q} \equiv 1$. (b)- kohta tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $x^{n^2-1} \equiv 1$, kun $n = 2^k$. Nyt

$$x^{n^2} \equiv (x^{n-1} + 1)^n \equiv x^{n^2-n} + 1,$$

koska kertalukua $n = 2^k$ olevat binomikertoimet ovat ensimmäistä ja viimeistä lukuun ottamatta parillisia. Siten

$$1 \equiv (1 + x^n)x^{n^2-n} \equiv x^{n^2-1}.$$

(c)-kohdassa osoitetaan vastaavasti, että $x^{n^2-n+1} \equiv 1$, kun $n = 2^k + 1$. Samalla tavalla kuin (b)-kohdassa saadaan

$$x^{n^2-1} \equiv (x^{n+1})^{n-1} \equiv (x + x^n)^{n-1} \equiv x^{n-1} + x^{n(n-1)}$$

ja

$$(1 + x^{n-1})x^{n^2-n} \equiv x^{n-1},$$

josta väite seuraa, kun sijoitetaan $1 + x^{n-1} \equiv x^n$.