Matematiikka-olympialaiset 1992 Moskovassa

Matti Lehtinen
Eero Saksman

Valmennus Matematiikan 33. olympialaisiin Moskovaan koostui totuttuun tapaan kirjevalmennusosuudesta ja valmennustilaisuudesta. Kirjevalmennusosuuteen valittiin Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan 30 parasta ja perussarjan 9 parasta. Ensimmäinen valmennuskirje postitettiin ennen joulua 1991, ja aktiivisimmat ehtivät saada kuusi valmennuskirjettä. Ensimmäinen valmennuskirje sisälsi laajemman, koko "olympiamatematiikan" kattamaan pyrkineen teoriaosuuden, ja myöhemmät kirjeet keskittyivät tehtäviin. Teoriaosuus perustui *Matti Lehtisen* (Sotakorkeakoulu) materiaaliin, ja tehtäväkirjeet hoiti *Eero Saksman* (Helsingin yliopisto).

Valmennettavista 17 aktiivisinta osallistui viidenteen pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, joka pidettiin 8. huhtikuuta 1992. Kukin kilpailija suoritti tehtävät omassa koulussaan. Kilpailun pohjoismaiden kesken kiertävä järjestämisvastuu oli Tanskalla. Yhteensä 65:n kaikkia viittä pohjoismaata edustaneen kilpailijan joukossa parhaat suomalaiset olivat *Simo Suhonen* (Sipoon lukio) kahdeksannella sijalla, *Tuomas Lukka* (Lappeenrannan lyseon lukio) jaetulla yhdeksännellä sijalla, *Ville Voipio* ja *Kaarlo Väisänen* (Helsingin Suomalainen Yhteiskoulu) jaetulla 14:nnellä sijalla sekä *Lari Rajantie* (Ressun lukio, Helsinki) jaetulla 20:nnellä sijalla.

Olympiavalmennettaville pidettiin 1. - 4. kesäkuuta 1992 valmennustilaisuus Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen tiloissa. Valmennustilaisuuteen osallistui - mm. fysiikka- ja kemiaolympialaisten päällekkäisyyden vuoksi - vain seitsemän valmennettavaa. Valmennusta antoivat Eero Saksman ja Matti Lehtinen. Valmennustilaisuudessa pidettyjen kokeiden, aikaisemman kilpailumenestyksen ja valmennuksen yhteydessä saadun arvioinnin perusteella olympiajoukkueeseen valittiin *Erika Andersson* (Åbo Katedralskola),

Kilpailupaikka, Moskovan yliopiston 240 m korkea päärakennus

Kilpailijoiden bussit odottavat toisen kilpailupäivän päättymistä.

Juha Kivijärvi (Hermannin lukio, Salo), Lari Rajantie, Simo Suhonen, Ville Voipio ja Kaarlo Väisänen. Joukkueen johtajana toimi Matti Lehtinen ja varajohtajana Eero Saksman.

33. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Moskovassa 10. - 21. heinäkuuta 1992. Kilpailujen käytännön järjestelyt hoiti Venäjän opetusministeriö. Tuomariston puheenjohtajana oli prof. *Juri Nesterenko* Moskovan yliopistosta, ja järjestelytoimikunnan sihteerinä sekä järjestelyjen yleisjohtajana *Galina Kuznetsova* Venäjän opetusministeriöstä. Kilpailujoukkueita oli kaikkiaan 64 maasta. Neuvostoliiton hajoamisen seurauksena kilpailussa esiintyivät sekä Itsenäisten Valtioiden Yhteisön että Venäjän, Ukrainan, Valko-Venäjän, Azerbaidzanin, Armenian, Kazahstanin joukkueet. Viisi viimeksi mainittua samoin kuin Viro, Latvia ja Liettua olivat mukana "ulkopuolella kilpailun". Kyseisten maiden edustajat eivät saaneet mitaleja, mutta osallistuivat mm. tuomariston toimintaan täysivaltaisina. Ensi kertaa mukana oli myös Etelä-Afrikan joukkue. Kilpailijoita oli yhteensä 351.

Joukkueenjohtajat kokoontuivat Moskovaan Saljut-hotelliin laatimaan kilpailun tehtäväsarjaa 10. heinäkuuta, ja joukkueet saapuivat Moskovaan varajohtajien kera 13. heinäkuuta. Kilpailun avajaiset pidettiin Ismailovon hotellikompleksin auditoriossa 14. heinäkuuta ja itse kokeet Moskovan yliopiston tiloissa 15. ja 16. heinäkuuta. Palkintojenjako ja päättäjäiset pidettiin 20. heinäkuuta Ismailovon hotellikompleksissa. Järjestelyt eivät sujuneet aivan rikkeittä: ennakko- ja muu tiedotus oli totuttuun verrattuna heikkoa, tuomariston työskentelyolot huonohkot, tuomariston työn johto oli haparoivaa, ja itse kilpailukokeiden toimeenpano ja valvonta antoivat aihetta moitteisiin. Kaikesta huolimatta kilpailuista jäi selvästi positiivinen yleisvaikutelma: järjestelyt onnistuivat ilmeisen vaikeisiin olosuhteisiin katsoen hyvin.

Olympialaisissa jaettiin 27 ensimmäistä, 55 toista ja 82 kolmatta palkintoa. Ensimmäisistä palkinnoista kuusi tuli Kiinaan, ja Kiina sai myös ylivoimaisesti eniten pisteitä maiden välisessä epävirallisessa joukkuekilpailussa. Seuraavilla sijoilla olivat USA, Romania, IVY, Englanti, Venäjä, Saksa, Unkari ja Japani.

Suomen menestys oli erittäin vaatimaton. Yhtäkään suomalaista ei palkittu mitalilla, ja maiden välisessä pistekilpailussa Suomi oli 54. Henkilökohtaisessa tulosluettelossa suomalaiset olivat sijoilla 233 (Kivijärvi, Rajantie), 263 (Suhonen), 289 (Voipio) ja 317 (Andersson, Väisänen). Matematiikan harrastuspohjan ja -mahdollisuuksien laajentamiseksi olisikin mitä pikimmin ryhdyttävä tarmokkaisiin toimiin.

Seuraavat matematiikkaolympialaiset pidetään Istambulissa Turkissa 1993, sitä seuraavat Hongkongissa 1994 ja Kanadassa 1995.

Ismailovon hotellikompleksissa voi kerralla yöpyä 10000 ihmistä. Matematiikkaolympialaisten osallistujat sulautuivat joukkoon lähes huomaamattomasti.

Tuomaristo Moskovan yliopiston rehtorin virkahuoneessa. Unkarin joukkueen johtaja Joszef Pelikan - kaksinkertainen kultamitalisti 1960-luvulta - tulkitsee. Etuoikealla tuomariston puheenjohtaja Nesterenko.

Matematiikkaolympialaisten ainoa audiovisuaalinen väline, tässä tulospalvelun käytössä.

Maiden pisteet

1.	Kiina	239
2.	USA	181
3.	Romania	177
4.	IVY	176
5.	Englanti	168
6.	Venäjä	158
7.	Saksa	149
8.	Unkari	142
	Japani	142
10.	Ranska	139
	Vietnam	139
12.	Jugoslavia	136
13.	Tsekkoslovakia	134
14.	Iran	133
15.	Bulgaria	127
16.	Pohjois-Korea	126
17.	Taiwan	124
	Ukraina	124
19.	Etelä-Korea	122
20.	Australia	118
21.	Israel	108
22.	Intia	107
23.	Kanada	105
24.	Belgia	100
25.	Puola	90
	Ruotsi	90
27.	Hongkong	89
	Singapore	89
29.	Italia	83
30.	Kazahstan	80
31.	Norja	77
32.	Hollanti	71
33.	Itävalta	70
34.	Argentiina	67
35.	Tunisia	64
36.	Turkki	63
37.	Kolombia	55
38.	Tanska	54
39.	Armenia	53
40.	Mongolia	51
41.	Espanja	50
	Thaimaa	50
43.	Brasilia	48
44.	Marokko	42
46.	Uusi Seelanti	41
47.	Filippiinit	37
	Kreikka	37
50.	Latvia	36
51.	Macao	35
	Portugali	35
53.	Kypros	34
54.	***Suomi***	***33***
55.	Meksiko	32
56.	Sveitsi	30
57.	Liettua	26
	Trinidad ja Tobago	26
59.	Indonesia	22
60.	Etelä-Afrikka	21
61.	Viro	18
62.	Kuuba	17

MATEMATIIKKAOLYMPIALAISET 1992

TEHTÄVÄT

Ensimmäinen kilpailupäivä

1. Määritä kaikki kokonaisluvut a, b, c, $1 < a < b < c$, joille $(a-1)(b-1)(c-1)$ on luvun $abc - 1$ tekijä.

2. Olkoon $\mathbf{R}$ reaalilukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, joille pätee

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$.

3. Avaruudessa on annettuna yhdeksän pistettä, joista mitkään neljä eivät ole samassa tasossa. Pisteiden välisistä janoista täsmälleen n kappaletta on väritetty sinisiksi tai punaisiksi, ja loput ovat värittämättömiä. Määritä pienin n, jolle välttämättä jotkin kolme sinistä tai kolme punaista janaa muodostavat yksivärisen kolmion.

Toinen kilpailupäivä

4. Tasossa on annettuna ympyrä C, suora L, joka sivuaa C :tä, ja L:n piste M. Määritä kaikkien niiden pisteiden P joukko, jolla on seuraava ominaisuus: on olemassa L :n pisteet Q ja R siten, että M on janan QR keskipiste ja C kolmion PQR sisään piirretty ympyrä.

5. Olkoon S äärellinen pistejoukko kolmiulotteisessa avaruudessa ja muodostukoot joukot S_x, S_y ja S_z joukon S pisteiden kohtisuorista projektioista yz-, zx- ja xy-tasoille. Merkitään $|A|$:lla äärellisen joukon A alkioiden lukumäärää. Osoita, että

$$|S|^2 \leq |S_x||S_y||S_z|.$$

(Huom. Pisteen kohtisuora projektio tasolle on pisteen kautta piirretyn, tasoa vastaan kohtisuoran suoran ja tason leikkauspiste.)

6. Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla n määritellään $S(n)$ suurimmaksi kokonaisluvuksi, jolle n^2 on k :n positiivisen neliöluvun summa kaikilla $k = 1, 2, \ldots, S(n)$ (positiivisia neliölukuja ovat luvut $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$).

(a) Todista, että $S(n) \leq n^2 - 14$ kaikilla $n \geq 4$.
(b) Määritä kokonaisluku n, jolle $S(n) = n^2 - 14$.
(c) Todista, että $S(n) = n^2 - 14$ pätee äärettömän monella kokonaisluvulla n.

Työaikaa 4,5 tuntia kumpanakin päivänä. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

RATKAISUT

1. Jos jokin luvuista a, b, c on pariton, on luvulla $abc-1$ parillinen tekijä $(a-1)(b-1)(c-1)$, mikä on mahdollista vain jos a, b ja c ovat kaikki parittomia. Siispä luvut a, b ja c ovat yhtäaikaa parillisia tai parittomia.

Mikäli olisi $a \geq 4$, voitaisiin arvioida

$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\frac{c}{c-1} \leq \frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5} = 2,$$

mikä on mahdotonta.

Jos $a = 2$, on luku $(b-1)(c-1)$ itseään suuremman ja parittoman luvun $2bc-1$ tekijä. Arvion $5 \cdot (b-1)(c-1) = 2bc + 5 + c(2b-5) + b(c-5) > 2bc - 1$ nojalla ainoaksi vaihtoehdoksi jää $2bc - 1 = 3(b-1)(c-1)$ eli $(b-3)(c-3) = 5$. Koska 5 on alkuluku, on oltava $b - 3 = 1$ ja $c - 3 = 5$. Löydettiin ratkaisu $(a, b, c) = (2, 4, 8)$.

Jos $a = 3$, niin $c \geq 7$ ja $2(b-1)(c-1)$ jakaa itseään suuremman luvun $3bc - 1$. Koska $3 \cdot 2(b-1)(c-1) = 3bc+6+(2b-6)c+(c-6)b > 3bc-1$, niin $3bc-1 = 2 \cdot 2(b-1)(c-1)$ eli $(b-4)(c-4) = 11$, josta seuraa $b = 5$, $c = 15$.

Tehtävällä on ratkaisut $(a, b, c) = (2, 4, 8)$ ja $(a, b, c) = (3, 5, 15)$.

2. Merkitään $f(0) = a$ ja $f(-a^2) = b$. Annetun funktionaaliyhtälön (=FY) nojalla $f(b) = f(0^2 + f(-a^2)) = -a^2 + a^2 = 0$. Jos $f(x) = 0$, niin $a = f(0) = f(0^2 + f(x)) = x + a^2$, joten $x = a - a^2$. Siis b on funktion f ainoa nollakohta, ja $b = a - a^2$. Toisaalta $f(b^2 + a) = f(b^2 + f(0)) = 0$, joten on oltava $b^2 + a = a - a^2$, eli $a^2 + b^2 = 0$. Näin on osoitettu, että $a = f(0) = 0$.

Sijoittamalla FY:ssä y:n paikalle $f(y)$ ja $x = 0$ nähdään, että (A): $f(f(y)) = y$. Sijoittamalla $y = 0$ saadaan (B): $f(x^2) = (f(x))^2$. Viimeksi johdetun yhtälön nojalla $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$. Koska 0 on ainoa nollakohta, niin (C): $f(x) > 0$, kun $x > 0$. Sijoittamalla FY:ssä y:n paikalle $f(y)$ ja soveltamalla tietoja (A) ja (B) nähdään, että itse asiassa

$$(D) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{kun } x \geq 0 \text{ ja } y \in \mathbf{R}.$$

Oletetaan, että $x > y$. Silloin tiedon (C) nojalla $f(x) = f(x-y) + f(y) > f(y)$, eli funktio f on aidosti kasvava. Jos jollakin $x \in \mathbf{R}$ olisi $x > f(x)$ niin seuraisi $f(x) > f(f(x))$, ja tiedon (A) nojalla $f(x) > x$, mikä on mahdotonta. Vastaavasti johdetaan ristiriita lähtien oletuksesta $x < f(x)$.

Ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että $f(x) = x$ kaikilla x. Kääntäen, identtinen funktio toteuttaa selvästi annetun funktionaaliyhtälön.

3. Osoitetaan, että $n = 33$.

Selvästikin pisteiden yhdysjanoja on kaikkiaan 36. Mikäli 33 yhdysjanaa on väritetty, voidaan valita kolme pistettä niin, että jokainen värittämätön yhdysjana päättyy johonkin näistä pisteistä. Merkitään jäljellejääneitä pisteitä $A_1, A_2, \ldots, A_6$; jokainen näiden välisistä yhdysjanoista on väritetty. Tarkastellaan seuraavaksi vain näiden pisteiden välisiä janoja. Pisteestä

A_1 lähtee ainakin kolme samanväristä janaa; symmetrian nojalla voidaan olettaa, että esim. janat A_1A_2, A_1A_3 ja A_1A_4 ovat punaisia. Jos nyt janoista A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 on jokin punainen, niin selvästi muodostuu punainen kolmio, jonka kärkenä on A_1. Jos taas viimeksi mainitut janat ovat kaikki vihreitä, on kolmio $A_2A_3A_4$ yksivärinen. [Itse asiassa tässä todistettiin yksinkertainen verkkoteorian väittämä, joka usein ilmaistaan muodossa: Kuuden henkilön joukosta voidaan valita kolme, jotka ovat joko kaikki toistensa tuttuja tai kaikki tuntemattomia toisilleen!] Näin on tullut osoitetuksi, että $n \leq 33$.

Todistus on valmis, kun konstruoidaan 32 yhdysjananväritys siten ettei yksiväristä kolmiota muodostu. Merkitään annettuja pisteitä numeroilla 1,2,...,9. Väritetään punaisiksi yhdysjanat 12, 13, 19, 18, 24, 25, 34, 35, 46, 47, 56, 57, 68, 69, 78, 79; jätetään värittämättä yhdysjanat 23, 45, 67, 89 ja väritetään loput janoista vihreäksi. Tarkistus on mekaaninen.

4. Sivutkoon ympyrä C suoraa L pisteessä P_1, olkoon O ympyrän C keskipiste ja P_2 ympyrällä C siten, että P_1P_2 on ympyrän halkaisija. Olkoon S puolisuora, joka alkaa pisteestä P_2, on janan OM suuntainen ja sijaitsee ympyrän C ulkopuolella. Todistetaan, että kysytty pistejoukko muodostuu puolisuorasta S (johon ei lueta pistettä P_2).

Riittää osoittaa, että mikäli pisteet PQR ovat kuten tehtävässä, niin janat PP_2 ja OM ovat yhdensuuntaisia. Merkitään $|PQ| = c$, $|QR| = a$ ja $|RP| = b$. Olkoon C' ympyrä kolmion PQR ulkopuolella, joka sivuaa sivua QR ja sivujen PQ ja PR jatkeita. Leikatkoon suora PP_2 suoran L pisteessä P_3. Käyttämällä hyväksi homotetiaa pisteen P suhteen, joka vie ympyrän C ympyrälle C', nähdään, että C' sivuaa suoraa L pisteessä P_3. Merkitään $|QP_3| = x$ ja $|RP_3| = y$. Tarkastelemalla pisteestä Q ympyrälle C' piirrettyja tangentteja nähdään, että pisteestä P ympyrälle C' piirretyn tangentin pituus on $c+x$. Vastaavasti kyseiseksi pituudeksi lasketaan $b+y$, joten $x-y=b-c$. Toisaalta $x+y=a$, joten $x=(a+b-c)/2$. Sivutkoon ympyrä C sivuja PQ ja PR pisteissä R_1 ja Q_2. Merkitään $|PR_1| = u$, $|QP_1| = v$ ja $|RQ_1| = w$. Koska $|QR_1| = |QP_1|$, niin $u+v=c$ ja vastaavasti $v+w=a$, $w+u=b$, joten $|RP_1| = |RQ_1| = w = (a+b-c)/2 = |QP_3|$. Koska M puolittaa sivun QR, niin edellisen nojalla se puolittaa myös janan P_1P_3. Siispä kolmiot $P_2P_1P_3$ ja OP_1M ovat yhdenmuotoisia, mistä seuraakin janojen PP_2 ja OM yhdensuuntaisuus.

5. Merkitään $|S_x| = a$, $|S_y| = b$ ja $|S_z| = c$. Todistetaan väite induktiolla lukumäärän $|S|$ suhteen.

Väite pätee selvästi kun $|S| = 1$.

Oletetaan sitten, että väite on tosi kun $|S| < N$, $N \geq 2$. Tarkastellaan joukkoa S, jolle $|S| = N$. Voidaan valita taso T, joka on yhdensuuntainen jonkin koordinaattitason kanssa ja joka jakaa joukon S kahdeksi osajoukoksi S_1 ja S_2 siten, että $N = |S_1| + |S_2|$ ja $|S_1| < N$, $|S_2| < N$. Induktiohypoteesin nojalla $|S_1|^2 \leq a_1b_1c_1$ ja $|S_2|^2 \leq a_2b_2c_2$, missä $a_1 = |(S_1)_x|, \ldots, c_2 = |(S_2)_z|$. Voidaan olettaa, että taso T on yhdensuuntainen xy-tason kanssa, jolloin $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, $c_1 \leq c$ ja $c_2 \leq c$. Induktioaskel on valmis, kun havaitaan, että Cauchyn epäyhtälön nojalla

$$|S|^2 = (|S_1| + |S_2|)^2 \leq (\sqrt{a_1b_1c_1} + \sqrt{a_2b_2c_2})^2$$
$$\leq c(\sqrt{a_1}\sqrt{b_1} + \sqrt{a_2}\sqrt{b_2})^2 \leq c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = abc.$$

6. Sovitaan, että ratkaisussa käytettävät kirjainsymbolit edustavat aina kokonaislukuja. Sanotaan, että luonnollisella luvulla m on k-esitys ($k \in \{1, 2, 3...\}$), mikäli m voidaan lausua k:n positiivisen neliöluvun summana.

(a) Riittää osoittaa, ettei millään luvulla $m \geq 16$ ole $(m-13)$-esitystä. Vastaoletuksen mukaan voitaisiin kirjoittaa $m = a_1+4a_2+9a_3+...+r^2a_r+\ldots$ ja $m-13 = a_1+a_2+a_3+\ldots$, missä $a_i \geq 0$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $13 = 3a_2 + 8a_3 + 15a_4 + ...$, mistä seuraa $a_i = 0$, kun $i \geq 3$, ja $3a_2 + 8a_3 = 13$. Suora kokeilu osoittaa, ettei viimeksikirjoitettu yhtälö toteudu positiivisilla a_2, a_3.

(b) Todistetaan, että $S(13) = 13^2 - 14$. Osoitetaan ensin, että luvulla $13^2 = 169$ on k-esitys koostuen vain neliöistä 1,4 ja 9 kun $25 \leq k \leq 155 = 13^2 - 14$. On ratkaistava kokonaislukuyhtälöt (A): $a_1+4a_2+9a_3 = 169$ ja (B): $a_1+a_2+a_3 = k$ ($a_i \geq 0$). Kun a_1 eliminoidaan pois, on yhtäpitävästi ratkaistava $3a_2 + 8a_3 = 169 - k$ rajoituksella $a_2 + a_3 \leq k$. Koska $2 \cdot 3 + 8 = 14$, $5 \cdot 3 = 15$, $2 \cdot 8 = 16$ ja $169 - k \geq 14$, niin voidaan kirjoittaa $169-k = 3 \cdot \ell + m$, missä $\ell \geq 0$ ja $m \in \{14, 15, 16\}$. Siis löytyy ei-negatiiviset r, s niin, että $169 - k = 3r + 8s$. Mikäli $r \leq 7$, valitaan $a_2 = r$, $a_3 = s$. Muussa tapauksessa kirjoitetaan $r = 8u+v$, missä $0 \leq v \leq 7$, ja valitaan $a_2 = v$, $a_3 = s+3u$. Näin on löydetty ei-negatiiviset a_2, a_3, joille $169 - k = 3a_2 + 8a_3$ ja $a_2 \leq 7$. Lisäksi $a_2 + a_3 \leq 7 + (169 - k)/8 \leq k$, kun $k \geq 25$. Valitaan $a_1 = k - a_2 - a_3 \geq 0$, jolloin kolmikko (a_1, a_2, a_3) toteuttaa yhtälöt (A) ja (B).

Kirjoitetaan lopuksi k-esitykset luvulle 169 k:n arvoilla 1,2,...,24: $169 = 169 = 144+25$
$= 144+16+9 = 100+64+4+1 = 2 \cdot 64+36+4+1 = 144+9+4 \cdot 4 = 64+4 \cdot 25+4+1$
$= 64+36+4 \cdot 16+4+1 = 4 \cdot 36+9+4 \cdot 4 = 4 \cdot 25+4 \cdot 16+4+1 = 36+8 \cdot 16+4+1$
$= 3 \cdot 36+5 \cdot 9+4 \cdot 4 = 4 \cdot 25+3 \cdot 16+5 \cdot 4+1 = 8 \cdot 16+4 \cdot 9+4+1 = 2 \cdot 36+9 \cdot 9+4 \cdot 4$
$= 4 \cdot 25+2 \cdot 16+9 \cdot 4+1 = 7 \cdot 16+4 \cdot 9+5 \cdot 4+1 = 36+13 \cdot 9+4 \cdot 4 = 4 \cdot 25+16+13 \cdot 4+1$
$= 6 \cdot 16+4 \cdot 9+9 \cdot 4+1 = 17 \cdot 9+4 \cdot 4 = 4 \cdot 25+17 \cdot 4+1 = 5 \cdot 16+4 \cdot 9+13 \cdot 4+1$
$= 17 \cdot 9+3 \cdot 4+4 \cdot 1$

(c) Väite seuraa b-kohdasta kun todistetaan, että tiedosta $S(X) = X^2 - 14$ seuraa $S(2X) = (2X)^2 - 14$, kun $X \geq 8$. Oletetaan siis, että $S(X) = X^2 - 14$ ja $X \geq 8$. Luvulle $(2X)^2$ saadaan k-esitykset, kun $k = 1, 2, 3$, yksinkertaisesti kijoittamalla luvulle X^2 vastaavat esitykset ja kertomalla puolittain luvulla 4. Toisaalta $(2X)^2 = X^2+X^2+X^2+X^2$ ja kun tässä oikealla puolella kirjoitetaan i:nnelle summattavalle riippumattomasti r_i-esitykset mahdollisilla r_i:n arvoilla saadaan luvulle $(2X)^2$ k-esitykset, kun $4 \leq k \leq (2X)^2 - 56$. Olkoon vihdoin $k = (2X)^2 - r$, missä $14 \leq r \leq 55$. Koska $X^2 \geq 8$, on oletuksen mukaan luvulla X^2 $(X^2 - r)$-esitys $X^2 = a_1^2 + ... + a_{X^2-r}^2$ Luvulle $(2X)^2$ saadaan k-esitys muodossa $(2X)^2 = a_1^2 + ... + a_{X^2-r}^2 + (3X^2) \cdot 1^2$.