

Matematiikan olympiavalmennus ja kansainväliset matematiikkaolympialaiset 1991

Matematiikan olympiavalmennus koostui totuttuun tapaan kirjevalmennusosuudesta ja valmennustilaisuudesta. Kirjevalmennusosuuteen valittiin Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan 25 parasta ja B-sarjan 8 parasta. Ensimmäinen valmennuskirje postitettiin joulukuun puolivälissä 1990, ja aktiivisimmat ehdivät saada kuusi valmennuskirjettä. Ensimmäinen valmennuskirje sisälsi laajemman, koko "olympiamatematiikan" kattamaan pyrkineen teoriaosuuden, ja myöhemmät kirjeet keskittyivät tehtäviin. Teoriaosuus perustui Matti Lehtisen (Sotakorkeakoulu) materiaaliin, ja tehtäväkirjeet hoitivat puoleksi Lehtinen ja Eero Saksman (Helsingin yliopisto).

Valmennettavista 16 aktiivisinta osallistui viidenteen pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, joka pidettiin 10. huhtikuuta 1991. Kukin kilpailija suoritti tehtävät omassa koulussaan. Kilpailun pohjoismaiden kesken kiertävä järjestämisvastuu oli Ruotsilla. Yhteensä 70:n kaikkia viittä pohjoismaata edustaneen kilpailijan joukossa parhaat suomalaiset olivat Harri Lappalainen (Outokumrunn lukio) jaetulla nel-



Suomen joukkue Sigtunassa. Takarivissä vasemmalta Kenrick Bingham, Harri Lappalainen, Jari Lappalainen, Sampo Sainio ja Eero Saksman. Edessä Ville Voipio ja Janne Peltonen.

jännellä sijalla, Topi Kärki (Simonkylän lukio, Vantaa) jaetulla seitsemännellä sijalla sekä Jari Lappalainen (Tapiolan lukio) ja Janne Peltonen (Lahden yhteiskoulu) jaetulla yhdeksännellä sijalla. Pohjoismaisen kilpailun tehtävät olivat ehkä hiukan liian helpot, sillä kärkipää oli erittäin tasainen: täyteen 20:een pisteeseen pääsivät Norjan Jan Kristian Haugland ja Xin-wei Kong sekä Ruotsin Andreas StTömbergsson. Harri Lappalaisen pistemäärä oli 19 ja Topi Kärjen 18, Jari Lappalaisen sekä Janne Peltonen 16.

Olympiavalmennettaville pidettiin 3. - 6. kesäkuuta 1991 valmennustilaisuus Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen tiloissa. Valmennustilaisuuteen osallistui 10 valmennettavaa. Valmennusta antoivat Eero Saksman ja Matti Lehtinen. Val-

mennustilaisuudessa pidettyjen kokeiden, aikaisemman kilpailumenestyksen ja valmennuksen yhteydessä saadun arvioinnin perusteella olympiajoukkueeseen valittiin Kenrick Bingham Helsingin Suomalaisesta yhteiskoulusta, Harri Lappalainen, Jari Lappalainen, Janne Peltonen, Sampo Sainio Joensuun normaalikoulun lukiosta ja Ville Voipio Helsingin Suomalaisesta yhteiskoulusta. Joukkueen johtajana toimi Matti Lehtinen ja varajohtajana Eero Saksman.

32. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Sigtunassa Ruotsissa 12. -23. heinäkuuta 1991. Sigtunan lisäksi toimintaa oli Upsalassa. Kilpailujen käytännön järjestelyt hoiti Svenska Matematikersamfundet. Tuomariston puheenjohtajana oli prof. Lars-Inge Hedberg Linköpingin yliopistosta, ja järjestely-

Maiden pisteet

1.	Neuvostoliitto	241
2.	Kiina	231
3.	Romania	225
4.	Saksa	222
5.	Yhdysvallat	212
6.	Unkari	209
7.	Bulgaria	192
8.	Iran	191
	Vietnam	191
10.	Intia	187
11.	Tsekkoslovakia	186
12.	Japani	180
13.	Ranska	175
14.	Kanada	164
15.	Puola	161
16.	Jugoslavia	160
17.	Korean tasavalta	151
18.	Itävalta	142
	Iso-Britannia	142
20.	Australia	129
21.	Ruotsi	
22.	Belgia	121
23.	Israel	115
24.	Turkki	111
25.	Thaimaa	103
26.	Kolombia	96
27.	Argentiina	94
	Singapore	94
29.	Hongkong	91
	Uusi Seelanti	91
31.	Marokko	85
	Norja	85
33.	Kreikka	81
34.	Kuuba	80
35.	Meksiko	76
36.	Italia	74
37.	Brasilia	
	Hollanti	73
39.	Tunisia	69
40.	Suomi	66
	Espanja	66
42.	Filippiinit	64
43.	Tanska	49
44.	Irlanti	47
45.	Trinidad	46
46.	Portugali	42
47.	Mongolia	33
48.	Indonesia	30
	Luxemburg	30
50.	Sveitsi	29
	Islanti	29
52.	Kypros	25
53.	Algeria	20
54.	Macao	18
55.	Bahrain	4

toimikunnan sihteerinä sekä järjestelyjen yleisjohtajana tohtori -ke Samqbelsson Göteborgin yliopistosta. Åke Samuelssonin pitkä kokemus Ruotsin IMO-joukkueen johtajana takasi järjestelyjen asiallisuuden.

Kilpailujoukkueita oli 56 maasta. Ensi kertaa mukana oli edustajia Sveitsistä sekä Trinidadista ja Tobagosta. Myös Tanska oli ensi kertaa mukana varsinaisella kilpailujoukkueella. Kilpailijoita oli yhteensä 318, joista 16 tyttöjä.

Joukkueenjohtajat kokoontuivat Upsalaan laatimaan kilpailun tehtäväsarjaa 12. heinäkuuta, ja joukkueet saapuivat Sigtunaan varajohtajien kera 15. heinäkuuta. Kilpailun viralliset avajaiset pidettiin Upsalan yliopiston juhlasalissa 16. heinäkuuta ja itse kokeet Sigtunassa 17. ja 18. heinäkuuta.

Palkintojenjako ja päättäjaiset pidettiin 22. heinäkuuta Upsalan kaupunginteatterissa. Tuomaristo osallistui Upsalan kaupungin ja Ruotsin matemaattisen yhdistyksen tarjoamille päivällisille sekä Sigtunan kunnan vastaanotolle. Joukkueille järjestettiin kokeiden ja päättäjäisten välise-

nä aikana retkiä mm. Tukholmaan.

Olympialaisissa jaettiin 20 ensimmäistä, 51 toista ja 84 kolmatta palkintoa. Ensimmäisistä palkinnoista neljä tuli Neuvostoliittoon ja Kiinaan, kolme Romaniaan, kaksi Unkariin ja Iraniin sekä yksi Isoon-Britanniaan, Ranskaan, Kanadaan, Yhdysvaltoihin sekä Saksaan. Suomen Harri Lappalainen sai kolmannen palkinnon.

Maiden välisen epävirallisen yhteispistekilpailun voitti Neuvostoliitto. Seuraavina olivat Kiina, Romania, Saksa, Yhdysvallat, Unkari, Bulgaria, Iran, Vietnam ja Intia. Pohjoismaista paras oli Ruotsi, joka oli 21. Suomi oli 40. - Ensi kertaa matematiikkaolympialaisten historian aikana kokonainen joukkue (Korean demokraattinen tasavalta) suljettiin kilpailusta vahvasti epäillyn, mutta kuitenkin aukottomasti toteennäyttämättömän vilpin vuoksi.

Seuraavat matematiikkaolympialaiset pidetään Moskovassa heinäkuussa 1992, sitä seuraavat Istanbulissa vuotta myöhemmin.



Seuraavaa pohjoismaista matematiikkakilpailua suunnitellaan. Vasemmalta Jens Toft Jensen ja Leif Andersen (Tanska), Per-Anders Ivert (Ruotsi), Sverrir Thorvaldsson (Islanti), Trygve Johnsen (Norja), Gunnar Fogelberg (Ruotsi) ja (selin) Idar Hansen (Norja).

TEHTÄVÄT

ENSIMMÄINEN KILPAILUPÄIVÄ

1. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste ja A' , B' ja C' kulmien CAB , ABC ja BCA puolittajien ja sivujen BC , AC ja BA leikkauspisteet. Todista, että

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

2. Olkoon $n > 6$ kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_k kaikki n :ää pienemmät positiiviset kokonaisluvut, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä n :n kanssa. Todista, että jos

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

niin n on alkuluku tai luvun 2 kokonaislukueksponenttinen potenssi.

3. Olkoon $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Määritä pienin n , jolle jokainen S :n n -alkioinen osajoukko sisältää viisi lukua, joista millään kahdella ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 1.

TOINEN KILPAILUPÄIVÄ

Olkoon G yhtenäinen verkko, jossa on k sivua. Osoita, että verkon sivut voidaan varustaa numeroilla $1, 2, \dots, k$ siten, että verkon jokaisella solmulla on seuraava ominaisuus: mikäli solmuun liittyy vähintään kaksi sivua, niin solmuun liittyvien sivujen numeroiden suurin yhteinen tekijä on 1. [Verkon G muodostavat joukko, jonka alkioita kutsutaan *solmuiksi*, ja joukko, jonka alkioita kutsutaan sivuiksi. Jokainen sivu yhdistää toisiinsa erään solmuparin. Jokainen solmupari u, v kuuluu enintään yhteen sivuun. Verkko on *yhtenäinen*, jos jokaista solmuparia x, y kohden on olemassa jono solmuja $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ siten, että v_i :tä ja v_{i+1} :tä yhdistää verkon sivu, $0 \leq i < m$.]

5. Olkoon ABC kolmio ja P sen sisäpiste. Osoita, että ainakin yksi kulmista $\angle PAB$, $\angle PBC$ ja $\angle PCA$ on pienempi tai yhtä suuri kuin 30° .

6. Päätymätön reaalityöjono x_0, x_1, x_2, \dots on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio C siten, että $|x_i| \leq C$ kaikilla $i \geq 0$. Olkoon $a > 1$ reaalityö. Konstruoi päätymätön rajoitettu jono x_0, x_1, x_2, \dots , jolle pätee

$$|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla i, j , $i \neq j$.

Työaika kumpanakikin päivänä on 4,5 tuntia. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on 7.

RATKAISUT

1. Merkitään $AB = c$, $BC = a$ ja $CA = b$. Tunnetusti I on kulman puolittajien AA' , BB' ja CC' leikkauspiste sekä pätee $AC' : C'B = b : a$ ja $AC' + C'B = c$, josta seuraa $AC' = cb/(a+b)$. Koska AI on kulman puolittaja kolmiossa ACC' , niin $CI : IC' = b : AC' = (a+b)/c$. Tämän avulla lasketaan

$$\frac{CI}{CC'} = \frac{CI}{CI + IC'} = \frac{CI/IC'}{CI/IC' + 1} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Laskemalla vastaavasti $BI : BB'$ ja $AI : AA'$ voidaan todistettava epäyhtälöpari kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}.$$

Oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa suoraan tunnetusta aritmeettis-geometrisestä epäyhtälöstä kun sitä sovelletaan lukuihin $(a+b)/2$, $(b+c)/2$ ja $(c+a)/2$. Vasemmanpuoleisen epäyhtälön todistamiseksi merkitään $X = (a+b-c)/(a+b+c)$, $Y = (b+c-a)/(a+b+c)$ ja $Z = (c+a-b)/(a+b+c)$, jolloin $X, Y, Z > 0$ ja epäyhtälö saa muodon $2 < (1+X)(1+Y)(1+Z)$. Tämä onkin totta, sillä $(1+X)(1+Y)(1+Z) = 1 + (X+Y+Z) + XY + \dots$ ja identtisesti $X+Y+Z = 1$. [Tässä seurattiin Harri Lappalaisen tyylikästä ratkaisua.]

2. Merkitään $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = S$. Jos n on pariton, niin $a_1 = 1$ ja $a_2 = 2$, joten $S = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, eli n on alkuluku. Olkoon sitten n parillinen. Jos n ei ole luvun 2 potenssi, voidaan kirjoittaa $n = 2^k s$, missä $k \geq 1$ ja s on pariton, $s \geq 3$. Mikäli $s \geq 5$, käytetään havaintoa $(s-4, s) = (s \pm 2, s) = 1$ ja päätellään, että $\{s-3, s-1, s, s+1, s+3\} \cap S = \emptyset$ ja $\{s-4, s-2, s+2\} \subset S$. Siis S ei muodosta aritmeettista jonoa, mikä on vastoin tehtävän oletusta. Tapauksessa $s = 3$ välttämättä $n \geq 12$ ja nähdään $S = \{1, 5, 7, 11, \dots, n-1\}$, mikä samasta syystä on vastoin oletusta.

3. Merkitään $A_1 = \{k \in S : 2|k\}$, $A_2 = \{k \in S : 3|k\}$, $A_3 = \{k \in S : 5|k\}$, $A_4 = \{k \in S : 7|k\}$ ja $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Helposti lasketaan, että $|A| = 216$ (merkintä $|B|$ tarkoittaa joukon B alkioiden lukumäärää.) Mikäli joukosta A valitaan viisi alkioita, ainakin kaksi niistä kuuluu samaan joukoista A_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Näillä kahdella on ykköstä suurempi yhteinen tekijä. Siis $n > 216$.

Merkitään sitten $B_1 = A \setminus \{2, 3, 5, 7\}$, $B_2 = \{11^2, 11 \times 13, 11 \times 17, 11 \times 19, 11 \times 23, 13^2, 13 \times 17, 13 \times 19\}$ ja $P = S \setminus \{B_1 \cup B_2\}$. Tällöin joukko P koostuu ykkösestä sekä joukossa S olevista alkuluvuista ja $|P| = |S| - |B_1| - |B_2| = 60$. Oletetaan nyt, että $T \subset S$ ja $|T| = 217$. Näytämme, että joukossa T on viisi lukua, joista millään kahdella ei ole ykköstä suurempia yhteisiä tekijöitä. Ilmeisesti riittää tarkastella tapausta $|T \cap P| \leq 4$. Tällöin $|T \cap (S \setminus P)| \geq 217 - 4 = 213$. Erityisesti huomaamme, että joukossa $S \setminus P$ (eli kaikkien joukon S yhdistettyjen lukujen joukossa) on enintään 7 alkioita, jotka eivät ole joukossa T , sillä $|S \setminus P| = 220$. Määritellään joukot M_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ seuraavasti: $M_1 = \{2 \times 23, 3 \times 19, 5 \times 17, 7 \times 13, 11 \times 11\}$, $M_2 = \{2 \times 29, 3 \times 23, 5 \times 19, 7 \times 17, 11 \times 13\}$, $M_3 = \{2 \times 31, 3 \times 29, 5 \times 23, 7 \times 19, 11 \times 17\}$, $M_4 = \{2 \times 37, 3 \times 31, 5 \times 29, 7 \times 23, 11 \times 19\}$, $M_5 = \{2 \times 41, 3 \times 37, 5 \times 31, 7 \times 29, 11 \times 23\}$, $M_6 = \{2 \times 43, 3 \times 41, 5 \times 37, 7 \times 31, 13 \times 17\}$, $M_7 = \{2 \times 47, 3 \times 43, 5 \times 41, 7 \times 37, 13 \times 19\}$ ja $M_8 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 13^2\}$. Selvästikin $M_i \subset S \setminus P$, $i = 1, 2, \dots, 8$. Edellä tehdyn huomion nojalla (kyyhkyslakkaperiaate!) välttämättä on olemassa i_0 , $1 \leq i_0 \leq 8$, siten, että $M_{i_0} \subset T$. Joukon M_{i_0} alkioista millään kahdella ei ole ykköstä suurempia yhteisiä tekijöitä, joten joukkoa T koskeva väite on todistettu. Täten $n \leq 217$. Yhdistetään tulokset: on osoitettu, että $n = 217$.

4. Numerointi voidaan suorittaa seuraavan ohjeen mukaan: Aloitetaan mielivaltaisesta solmusta v_0 ja kävellään pitkin verkon perättäisiä sivuja numeroiden ne sitä mukaa kun niiden kautta kuljetaan järjestyksessä 1,2,3,..., jne. Jatketaan kävelyä kunnes se on mahdotonta ilman että kuljetaan kahteen kertaan saman sivun kautta. Jos verkossa on vielä numeroimattomia sivuja, jatketaan kävelyä aloitetaan sellaisesta solmusta, jossa on jo vierailtu aiemmin. Tämä on mahdollista verkon yhtenäisyyden nojalla. Jälleen jatketaan niin kauan kuin se on mahdollista ilman että kävellään uudelleen aiemmin kuljetun sivun kautta. Jatkamalla proseduuria tulevat vihdoin kaikki verkon sivut numeroitua.

Olkoon sitten v mielivaltainen annetun verkon solmu. Tarkastelemalla sitä tilannetta, jossa solmuun v saavuttiin ensimmäisen kerran, nähdään että on olemassa kolme vaihtoehtoa: (1) Solmuun v liittyvien sivujen joukossa on sivu numero 1, jonka kautta kävely alkoi. (2) Solmuun v liittyvien sivujen joukossa on kaksi sivua, jotka ovat suoritettun kävelyn perättäisiä sivuja. (3) Solmuun v liittyy vain yksi sivu. Tapauksissa 1 ja 2 solmuun v liittyvien sivujen numeroiden suurin yhteinen tekijä on 1, eli numerointi toteuttaa tehtävän vaatimukset.

5. Käytetään tavanmukaisia merkintöjä $AB = c$, $BC = a$ ja $CA = b$. Lisäksi merkitään $\angle PAB = \alpha'$, $\angle PBC = \beta'$ ja $\angle PCA = \gamma'$ sekä $PA = a'$, $PB = b'$ ja $PC = c'$. Olkoon vihdoin T kolmion ABC ala ja $R = a'c + b'a + c'b$. Tehdään vasta oletus: $\alpha' > 30^\circ$, $\beta' > 30^\circ$ ja $\gamma' > 30^\circ$. Kosinilauseeseen mukaan $b'^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c \cos \alpha'$, $c'^2 = b'^2 + a'^2 - 2b'a \cos \beta'$, $a'^2 = c'^2 + b'^2 - 2c'b \cos \gamma'$. Laske-malla nämä puolittain yhteen saadaan $2a'c \cos \alpha' + 2b'a \cos \beta' + 2c'b \cos \gamma' = a^2 + b^2 + c^2$. Koska kosini on aidosti vähenevä tarkasteltavilla muuttujan arvoilla, seuraa tästä vasta oletuksen nojalla $\sqrt{3}R > a^2 + b^2 + c^2$. Ilmaistaan T osakolmioiden PAB , PBC ja PCA alojen summana: $T = (a'c \sin \alpha' + b'a \sin \beta' + c'b \sin \gamma')/2$. Arvioimalla tätä lauseketta nähdään, samaten vasta oletuksen nojalla, että $T > R/4$. Yhdistetään arviot: $T > (a^2 + b^2 + c^2)/(4\sqrt{3})$. Haluttu ristiriita seuraa, kun osoitetaan oikeaksi epäyhtälö: $T \leq (a^2 + b^2 + c^2)/(4\sqrt{3})$. Tätä varten sovelletaan Heronin kaavaa:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ &\leq \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{1}{12\sqrt{3}} (a+b+c)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Yllä ensimmäinen arvio saatiin kun Heronin kaavan juuretavassa kolmen viimeisen termin tuloa arvioitiin aritmeettis-geometrisen epäyhtälön avulla. Toisessa arvioissa sovellettiin Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä. [Tämä taidokas ratkaisu on Jari Lappalaisen käsialaa.]

6. Olkoon luonnollisen luvun i binääriesitys $i = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \dots + b_k 2^k$, missä $b_i \in \{0, 1\}$ ja $k \in \mathbf{N}$. Määritellään $h_i = b_0 + b_1 2^{-a} + b_2 2^{-2a} + \dots + b_k 2^{-ka}$, jolloin $0 \leq h_i \leq 1 + 2^{-a} + 2^{-2a} + \dots \leq 1/(1 - 2^{-a})$, eli jono h_0, h_1, \dots on rajoitettu. Olkoon sitten $j < i$, $j = c_0 + c_1 2 + c_2 2^2 + \dots + c_k 2^k$, $c_i \in \{0, 1\}$. Olkoon $t = \min\{p \in \{0, 1, \dots, k\} \mid b_p \neq c_p\}$. Tällöin $2^t(i - j)$, joten $|i - j| \geq 2^t$. Lisäksi

$$\begin{aligned} |h_i - h_j| &\geq |(b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)2^{-a} + \dots + (b_k - c_k)2^{-ka}| \\ &\geq |(b_t - c_t)2^{-ta}| - |(b_{t+1} - c_{t+1})2^{-(t+1)a}| - \dots - |(b_k - c_k)2^{-ka}| \\ &\geq 2^{-ta} - 2^{-(t+1)a}/(1 - 2^{-a}) = (2^t)^{-a}(2^a - 2)/(2^a - 1). \end{aligned}$$

Yhdistämällä tehdyt arviot nähdään, että $|h_i - h_j||i - j|^a \geq (2^a - 2)/(2^a - 1)$. Siispä etsitty jono voidaan määritellä esim. seuraavasti: $x_i = (2^a - 1)/(2^a - 2)h_i$, $i \geq 0$. [Kilpailijat löysivät tehtävälle 6 useita erilaisia ratkaisuja, joista yksinkertaisimpien joukossa on seuraava: $x_i = 4\{i\sqrt{2}\}$, missä $\{\{x\}\}$ on reaaliluvun x desimaaliosa. Tämä ratkaisu on voimassa myös kun $a = 1$.]