Eero Saksman ja Matti Lehtinen:

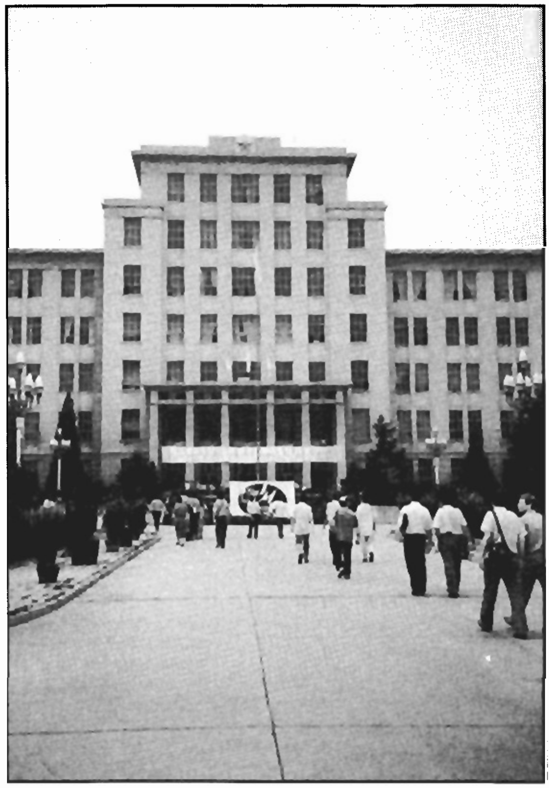
Matematiikan olympiavalmennus ja kansainväliset olympialaiset 1990

Matematiikan olympiavalmennus koostui totuttuun tapaan kirjevalmennusosuudesta ja valmennustilaisuudesta. Kirjevalmennusosuuteen valittiin Matemaattisten aineiden opettajien liiton lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan 19 parasta ja perussarjan 16 parasta. Ensimmäinen valmennuskirje postitettiin tammikuun alussa, ja aktiivisimmat ehtivät saada kuusi valmennuskirjettä. Aikaisemmista vuosista poiketen ensimmäinen valmennuskirje sisälsi laajemman, koko "olympiamatematiikan" kattamaan pyrkineen teoriaosuuden, ja myöhemmät kirjeet keskittyivät tehtäviin. Kirjevalmennuksen hoiti pääosin Eero Saksman.

Kaksikymmentä valmennuksessa aktiivisinta osallistui neljänteen pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun, joka pidettiin 5. huhtikuuta. Kilpailun pohjoismaiden kesken kiertävä järjestämisvastuu oli tällä kertaa Suomella. Kaikkiaan 60:n viittä pohjoismaata edustaneen kilpailijan joukossa parhaaseen pistemäärään pääsi Jyväskylän normaalikoulun lukion Kimmo Uutela. Kahdenkymmenen parhaan joukkoon sijoittuivat suomalaisista myös Järvenpään lukion Mika Seppä ja Tapiolan lukion Jukka Kohonen.

Olympiavalmennettaville pidettiin 1.-4. kesäkuuta valmennustilaisuus Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen tiloissa. Peruutusten ja yhteensattumien vuoksi osallistujamäärä jäi kahdeksaan. Valmennusta antoivat Eero Saksman ja Matti Lehtinen. Valmennustilaisuudessa pidettyjen kokeiden, aikaisemman kilpailumenestyksen ja valmennuksen yhteydessä saadun arvioinnin perusteella olympiajoukkueeseen valittiin Kimmo Uutela, Mika Seppä, Jukka Kohonen, Jari Lappalainen Tapiolan lukiosta, Janne Peltonen Lahden yhteiskoulusta ja Jaakko Ruohio Tainionkosken lukiosta. Joukkueen johtajana toimi Eero Saksman ja varajohtajana Matti Lehtinen.

Beijingin Vieraiden kielten instituutti - matematiikkaolympialaisten pitopaikka.



Kiinan kansantasavallan varaopetusministerin Liu Binin 12. tammikuuta 1990 lähettämän kutsun mukaisesti 31. Kansainväliset matematiikkaolympialaiset pidettiin Beijingissä 8.-19. heinäkuuta. Kilpailujoukkueita oli 54 maasta, ensikertalaisina Japani ja Macao, ja kilpailijoita oli kaikkiaan 308.

Joukkueiden johtajat kokoontuivat laatimaan kilpailun tehtäväsarjaa 8. heinäkuuta, ja joukkueet saapuivat Kiinaan varajohtajien kera 10. heinäkuuta. Kilpailun juhlalliset avajaiset pidettiin Beijingin Haidian-urheiluhallissa 11. heinäkuuta ja itse kokeet Beijingin Vieraiden kielten instituutissa 12. ja 13. heinäkuuta. Palkintojenjako ja päättäjäiset pidettiin 18. heinäkuuta Kiinan kansallisteatterissa. Päättäjäisbanketti järjestettiin Suuressa Kansojen Hallissa. - Kilpailupäivinä myös Kiinan opetusministeriö ja Kiinan matemaattinen yhdistys järjestivät kumpikin johtajistolle illallistilaisuuden.

Kilpailun virallisen ohjelman lomaan oli järjestetty runsaasti tutustumiskäyntejä Beijingin ja lähiympäristön nähtävyyksiin - joukkueet ja johtajisto kävivät mm. Keisarin pa-

Maiden joukkueiden koot ja yhteispisteet:

Kiina	6	230
Neuvostoliitto	6	193
Yhdysvallat	6	174
Romania	6	171
Ranska	6	168
Unkari	6	162
DDR	6	158
Tsekkoslovakia	6	153
Bulgaria	6	152
Englanti	6	141
Kanada	6	138
Saksan liittotasavalta	6	138
Italia	6	131
Iran	6	122
Itävalta	6	121
Australia	6	121
Intia	6	114
Norja	6	112
Korean kansant.valta	6	109
Japani	6	107
Puola	6	106
Hong Kong	6	105
Vietnam	6	104
Brasilia	6	102
Jugoslavia	6	98
Israel	6	95
Singapore	6	93
Ruotsi	6	91
Kolombia	6	90
Hollanti	6	90
Korean tasavalta	6	78
Turkki	6	73
Thaimaa	6	73
Espanja	6	72
Marokko	5	71
Meksiko	6	69
Uusi Seelanti	6	68
Kuuba	6	67
Argentiina	6	67
Irlanti	6	65
Bahrain	6	65
Kreikka	6	62
Suomi	6	59
Luxemburg	2	58
Tunisia	4	55
Mongolia	6	54
Kuwait	4	53
Kypros	4	46
Filippiinit	6	46
Portugal	6	44
Indonesia	6	40
Macao	6	32
Islanti	3	30
Algeria	4	29

latsissa ja kesäpalatsissa, Taivaan temppelissä, Badalingissa Kiinan muurilla ja Ming-dynastian keisarihaudoilla. Kilpailijoille oli liisäksi järjestetty kouluvierailu. Kilpailijat oli majoitettu Vieraiden kielten instituuttiin, kohtalaisen askeettisiin oloihin, ja johtajisto hyvätasoiseen Fragrant Hill -hotelliin, jossa myös tuomariston kokoukset pidettiin.

Kiinan poliittisen tilanteen aiheuttamat ennakkoarvelut ja -pelot osoittautuivat sikäli aiheettomiksi, että tilanne Beijingissä kilpailuaikaan oli täysin rauhallinen, eivätkä isännät mitenkään erityisesti näyttäneet pyrkivän käyttämään matematiikkaolympialaisia kansainvälisen maineensa kohentamiseen. Politiikkaa ei edes virallisisaa puheissa juuri sivuttu.

Olympialaisissa jaettiin 23 ensimmäistä, 56 toista ja 76 kolmatta palkintoa. Ensimmäisistä palkinnoista viisi jäi Kiinaan, kolme tuli Neuvostoliittoon ja Ranskaan, kaksi Yhdysvaltoihin, Isoon-Britanniaan ja Romaniaan, ja yksi Intiaan, Bulgariaan, Brasiliaan, Italiaan, Luxemburgiin ja Unkariin. Virheettömään suoritukseen pääsi kaksi kiinalaista, yksi ranskalainen ja Neuvostoliiton vain 15-vuotias Eugenia Malinnikova, joka ylsi samaan saavutukseen jo toisissa matematiikkaolympialaisissaan. Maiden välisen epävirallisen yhteispistekilpailun voitti Kiina. Seuraavina olivat Neuvostoliitto, Yhdysvallat, Romania ja Ranska.

Suomen menestys pysyi samalla tasolla kuin muutamana viime vuotena. Ilahduttavaa oli Kimmo Uutelan saama kolmannen luokan palkinto. Päävaikeuksiamme tuntuu olevan saada kokoon sellainen kuuden hengen joukkue, jonka kaikki jäsenet olisivat IMO-tasoa, osaisivat ratkaista luotettavasti ainakin kaksi varsin vaativan tehtäväsarjan kuudesta tehtävästä. Joukkueemme parhaat ovat säännöllisesi suurin piirtein verrattavissa mm. muiden pohjoismaiden parhaisiin, mutta kärkemme on kovin kapea.

Suomen joukkuetta Taivaan temppelissä tulkki-huoltajansa seurassa. Vas. Jaakko Ruohio, Jukka Kohonen, Jari Lappalainen, Mika Seppä ja Kimmo Uutela.

MATEMATIIKKAOLYMPIALAISET 1990

TEHTÄVÄT

Ensimmäinen kilpailupäivä

1. Annetun ympyrän jänteet leikkaavat toisensa ympyrän sisällä pisteessä E. Piste M on janan EB sisäpiste ja Y on pisteiden D, E ja M kautta kulkeva ympyrä. Pisteen E kautta piirretty ympyrän Y tangentti leikkaa suoran BC pisteessä F ja suoran AC pisteessä G. Merkitään $\frac{|AM|}{|AB|} = t$. Määritä suhde $\frac{|EG|}{|EF|}$ suureen t funktiona.

2. Tarkastellaan joukkoa E, joka koostuu $2n-1$ eri pisteestä, jotka kaikki sijaitsevat annetun ympyrän kehällä ($n \geq 3$). Näistä pisteistä k kappaletta värjätään mustaksi. Kutsumme väritystä hyväksi, jos ainakin yhdellä parilla mustia pisteitä on se ominaisuus, että jommalla kummalla pisteparin määräämällä ympyränkaarella on sisäpisteinä täsmälleen n joukon E pisteistä.

Etsi pienin luvun k arvo, jolle jokainen joukon E k:n pisteen väritys on hyvä.

3. Määritä kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joille $\frac{2^n+1}{n^2}$ on kokonaisluku.

Toinen kilpailupäivä

4. Olkoon Q^+ positiivisten rationaalilukujen joukko. Konstruoi funktion $f : Q^+ \to Q^+$ siten, että $f(x\,f(x)) = \frac{f(x)}{y}$ kaikilla x, $y \in Q^+$.

5. Olkoon annettu kokonaisluku $n_0 > 1$. pelaajat A ja B valitsevat vuorotellen kokonaislukuja n_1, n_2, ... seuraavien sääntöjen mukaan. Tietäen luvun n_{2k} pelaaja A valitsee vuorollaan mielivaltaisesti luvun n_{2k+1}, joka toteuttaa ehdon $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$. Pelaaja B, joka tietää luvun n_{2k+1}, valitsee puolestaan vuorollaan mielivaltaisesti luvun n_{2k+2}, jonka tulee toteuttaa ehto $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} = p^r$, missä $p \geq 2$ on alkuluku ja $r \geq 1$ on kokonaisluku (luvut p ja r eivät ole kiinteitä). Pelin aloittaa pelaaja A.

Pelaaja A voittaa pelin valitsemalla luvun 1990.
Pelaaja B voittaa pelin valitsemalla luvun 1.

Millä luvun n_0 arvoilla

(a) pelaajalla A on voittostrategia,
(b) pelaajalla B on voittostrategia,
(c) kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa?

6. Osoita, että on olemassa konveksi 1990-kulmio, jolla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

(a) kaikki monikulmion kulmat ovat yhtä suuret,
(b) monikulmion sivujen pituudet ovat luvut 1^2, 2^2, 3^2, ... 1989^2, 1990^2 jossain järjestyksessä.

Työaikaa kumpanakin päivänä 4,5 tuntia. Kaikki tehtävät samanarvoisia, maksimipistemäärä joka tehtävästä 7.

RATKAISUT

1. Osoitetaan ensin, että piste A on pisteiden G ja C välissä. Selvästikin (piirrä kuvio!) $\angle EDM < \angle EDB$. Yhtä suurina kehäkulmina $\angle FEB = \angle EDM$ ja $\angle CAB = \angle BDE$. Täten $\angle FEB < \angle CAB$, mistä väite seuraakin.

Piirretään kuvioon janat DA, DM ja DB. Nyt $\angle CEF = \angle DEG = \angle EMD$ (kehäkulmat) ja $\angle FCE = \angle MAD$. Silloin $\triangle CEF \sim \triangle AMD$ ja $CE/EF = AM/DM$. Toisaalta $\angle ECG = \angle DBM$ ja $\angle CGE = \angle CEF - \angle ECG = \angle DME - \angle DBM = \angle MDB$, joten $\triangle CGE \sim \triangle BDM$ ja $GE/CE = DM/MB$. Kertomalla keskenään johdetut verrannot saadaan

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{AB} = \frac{t\,AB}{(1-t)\,AB} = \frac{t}{1-t}.$$

2. Sanomme kahta E:n pistettä *naapureiksi*, mikäli jommalla kummalla pisteiden välisistä ympyränkaarista on sisäpisteinä täsmälleen n joukon E pistettä. Etsimme pienintä lukua k, jolle jokainen E:n k-alkioinen osajoukko sisältää ainakin kaksi pistettä, jotka ovat naapureita.

Yhdistetään jokaiset kaksi naapuria janalla. Koska joka pisteellä on tasan kaksi naapuria, syntyy yhdestä tai useammasta suljetusta murtoviivasta koostuva kuvio. Numeroidaan E:n pisteet ympyrän kehällä järjestyksessä numeroin $0, 1, 2, \ldots, 2n-2$. Tällöin kuvioon kuuluva murtoviiva sisältää pisteet $r + s(n+1) \bmod 2n-1$, missä r on jokin kyseisen murtoviivan piste ja $s = 0, 1, \ldots, 2n-2$ (samat pisteet saattavat esiintyö jonossa useamminkin). Ilmeisesti jokaisen suljetun murtoviivan kärkien lukumäärä on $(2n-1)/d$, missä $d = (2n-1,\, n+1)$. On olemassa kaksi vaihtoehtoa:

(i) Jos $2n-1$ ei ole jaollinen kolmella, niin

$$d = (2n-1,\, 2(n+1)) = (2n-1,\, (2n-1)+3) = (2n-1,\, 3) = 1.$$

Suljettuja murtoviivoja on vain yksi.

(ii) Jos $3 \mid (2n-1)$, niin $d = 3$. Suljettuja murtoviivoja on kolme.

Tämän jälkeen pienin luvun k arvo on helppo päätellä kummassakin tapauksessa erikseen. Väritys on hyvä jos ja vain jos kaksi saman suljetun murtoviivan peräkkäistä pistettä on mustia. Tapauksessa (i) pienin k on n, tapauksessa (ii) pienin k:n arvo on

$$3\left(\frac{2n-1}{6} - \frac{1}{2}\right) + 1 = n - 1.$$

3. Osoitetaan, että ainoa ratkaisu on $n = 3$. Oletetaan että $n = 3^k d$, missä $k \geq 0$ ja $(d, 6) = 1$ on ratkaisu. Osoitetaan ensin, että $k \leq 1$. Olkoon $k \geq 2$. Sovelletaan kaavaa $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ induktiivisesti; saadaan

$$2^n + 1 = 2^{3^k d} + 1 = (2^d + 1) \prod_{m=0}^{k-1} \left(2^{2\cdot 3^m d} - 2^{3^m d} + 1\right).$$

Kun käytetään hyväksi tietoa $2^6 \equiv 1 \bmod 9$ ja kokeillaan arvoja $t = 1, 3, 5$ nähdään, että $2^{2t} - 2^t + 1 \equiv 3 \bmod 9$ kaikilla parittomilla t. Siispä yllä olevassa hajotelmassa tätä muotoa olevat tulon tekijät eivät ole jaollisia 9:llä. Koska kuitenkin $2^n + 1$ (joka on jaollinen n^2:lla) on jaollinen 3^{2k}:lla, niin $2^d + 1$ on jaollinen 3^k:lla. Mutta kun sovelletaan tietoja $(d, 6) = 1$ ja $2^6 \equiv 1 \bmod 9$ sekä kokeilemalla arvoja $d = 1$ ja $d = 5$ nähdään, että 9 ei ole $(2^d + 1)$:n tekijä. Siis $k = 0$ tai $k = 1$.

Todistetaan sitten, että $d = 1$. Tähän tarvitaan aputulos: jos $a^r \equiv a^r \equiv 1 \bmod p$, niin $a^{(r, s)} \equiv 1 \bmod p$. Aputuloksen todistamiseksi valitaan ε pienimmäksi eksponentiksi, jolle $a^\varepsilon \equiv 1 \bmod p$. Jos r ei ole jaollinen ε:lla, niin $r = f\varepsilon + g$, missä $0 < g < \varepsilon$. Tällöin $a^g \equiv a^{f\varepsilon + g} = a^r \equiv 1$, mikä on vastoin ε:in määritelmää. Tästä seuraa $a^{(r,s)} = a^{h\varepsilon} \equiv 1$ eli väite.

Oletetaan sitten, että $d \neq 1$. Olkoon p luvun d pienin alkutekijä. Välttämättä $p \geq 5$. Koska $2^n + 1$ on jaollinen p:llä, $2^n \equiv -1 \bmod p$ eli $2^{2n} \equiv 1 \bmod p$. Toisaalta Fermat'n pienen lauseen nojalla $2^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, joten aputuloksen perusteella $2^j \equiv 1 \bmod p$, missä $j = (p-1, 2n)$. Nyt joko $2n = 2d$ tai $2n = 6d$, ja $(j, d) = 1$. Tästä seuraa, että $j|6$ eli j on jokin luvuista 1, 2, 3 ja 6. Koska $2^j - 1$ on jaollinen p:llä, niin jokin luvuista 1, 3, 7 ja 63 on jaollinen p:llä. Ainoa mahdollisuus on $p = 7$. Toisaalta kokeilemalla eksponenteilla $0, 1, 2, \ldots, 5$ nähdään, että $2^m + 1$ ei ole millään kokonaisluvulla m jaollinen 7:llä. Oletus $7|(2^n + 1)$ johti siis ristiriitaan.

On siis $d = 1$, ja ainoa ratkaisu $n > 1$ on $n = 3^1 \cdot 1 = 3$.

4. Sijoittamalla funktionaaliyhtälöön $x = 1$ nähdään, että $y = f(1)/f(f(y))$. Jos $f(y_1) = f(y_2)$, niin $y_1 = y_2$, eli f on injektio. Sijoittamalla edelleen $y = 1$ saadaan $f(f(1)) = f(1)$, joten injektiivisyyden perusteella $f(1) = 1$. Siis

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \tag{1}$$

kaikilla y. Tästä ja funktionaliyhtälöstä seuraa $f(1/y) = 1/f(y)$. Kun alkuperäiseen yhtälöön sijoitetaan $y = f(1/t)$, saadaan

$$f(xt) = f(x)f(t). \tag{2}$$

Heti nähdään, että ehdot (1) ja (2) toteuttava funktio f toteuttaa tehtävän funktionaaliyhtälön.

Ehdon (2) toteuttava funktio voidaan määritellä mielivaltaisesti alkuluvuille p_i ja laajentaa se positiivisten rationaalilukujen joukkoon kaavalla

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}) = f(p_1)^{n_1} f(p_2)^{n_2} \ldots f(p_k)^{n_k}. \tag{3}$$

(n_i:t kokonaislukuja). Tällainen funktio toteuttaa ehdon (1) jos ja vain jos se toteuttaa ehdon (1) kaikilla alkuluvuilla. Olkoon p_j j:s alkuluku. Määritellään $f(p_{2j}) = p_{2j-1}$ ja $f(p_{2j-1} = 1/p_{2j}$. Suora lasku osoittaa, että $f(f(p) = 1/p$ kaikilla alkuluvuilla. Tehtävän ehdot toteuttava funktio saadaan, kun tämä funktio laajennetaan positiivisten rationaalilukujen joukkoon kaavalla (3).

5. Merkitään W_A:lla, W_B:llä ja W_T:llä niiden lukujen n_0 joukkoja, joilla A:lla on voittostrategia, B:llä on voittostrategia tai kummallakaan pelaajalla ei ole voittostrategiaa. Oletetaan, että $\{m, m+1, \ldots, 1990\} \subset W_A$. Todistetaan ensin, että jos $mp^r \leq s \leq 1990$, missä p^r on suurin s:n alkulukupotenssimuotoinen tekijä, niin myös ehdon $\sqrt{s} \leq n_0 \leq m$ toteuttavat luvut n_0 kuuluvat joukkoon W_A. Jos nimittäin $\sqrt{s} \leq n_0 < m$, niin A voi valita $n_1 = s$. Silloin pelaaja B joutuu valitsemaan ehdon $m \leq s/p^r \leq n_2 < s \leq 1990$ toteuttavan luvun n_2. Koska $n_2 \in W_A$, A voittaa.

Koska $45^2 > 1990$, niin $\{45, 46, \ldots, 1990\} \subset W_A$. Valitsemalla $m = 45$, $s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ nähdään, että $\{21, 22, \ldots, 44\} \subset W_A$. Muuttujien arvot $m = 21$, $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$; $m = 13$, $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ ja $m = 11$, $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ antavat $\{13, 14, \ldots, 20\} \subset W_A$, $\{11, 12\} \subset W_A$ ja $\{8, 9, 10\} \subset W_A$. Siis $\{8, 9, \ldots, 1990\} \subset W_A$.

Olkoon sitten $n_0 > 1990$. Nyt pelaaja A voi valita väliltä $[n_0, n_0 + 142]$ luvun n_1, joka on jaollinen luvulla $143 = 11 \cdot 13$. Silloin pelaaja B joutuu valitsemaan luvun n_2, jolle pätee $11 \leq n_2 \leq (142 + n_0)/2 < n_0$. Kun pelaaja A soveltaa tätä taktiikkaa riittävän kauan, joutuu pelaaja B lopulta valitsemaan luvun väliltä $[11, 1990]$, jolloin A pystyy varmistamaan voiton. Siis kaikki lukua 1990 suuremmat luvut kuuluvat joukkoon W_A.

Tarkastellaan sitten tapausta $n_0 \leq 5$. Koska pienin kolmen eri alkuluvun tulo on $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, niin pelaaja A joutuu valitsemaan luvun, joka on enintään kahden alkulukupotenssin tulo. Tämän jälkeen B voi valita seuraavaksi luvuksi joko pienemmän näistä alkulukupotensseista tai peräti luvun 1; joka tapauksessa $n_2 < n_0$. Jatkamalla näin pelaaja B voi valita luvun 1 ja voittaa. Siis $\{2, 3, 4, 5\} \subset W_B$.

Jos $n_0 = 6$ tai 7, on pelaajan A valittava häviön välttääkseen joko $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ tai $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Tämän jälkeen B:n on valittava $n_2 = 6$. Valitsemalla vuorotellen 6, 30, 6, jne. pelaajat voivat estää toistensa voiton. Siis $\{6, 7\} = W_T$.

6. Todistetaan hiukan yleisempi tulos, jossa 1990 korvataan luvulla n. Oletetaan, että $n = prs$, missä luvut p, r ja s ovat ykköstä suurempia eikä niillä ole yhteisiä alkutekijöitä. Jos f, g ja h ovat mielivaltaisia kahden kokonaisluvun funktioita, niin pätee

$$\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{n}(jrs+kps+lpr)}(f(k, l) + g(l, j) + h(j, k)) = 0. \tag{4}$$

Jos nimittäin erotetaan summasta erilleen se osa, joka sisältää funktion f, saadaan nolla, sillä $\sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ijrs/n} = \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ij/p}$, mikä häviää geometrisen sarjan summan kaavan perusteella. Samoin päätellään, että myös funktion g ja funktion h sisältävät summan osat häviävät.

Seuraavaksi havaitaan, että luvut $jrs + kps + lpr$, missä $0 \le j < p$, $0 \le k < r$ ja $0 \le l < s$ muodostavat täydellisen jäännösluokan modulo n, sillä niitä on yhteensä n kappaletta ja mitkään kaksi eivät ole kongruentit keskenään: jos $j_1rs + k_1ps + l_1pr \equiv j_2rs + k_2ps + l_2pr \bmod n$, niin $p|(j_1 - j_2)$ jne. Lisäksi luvut $jrs + ks + l$, missä $0 \le j < p$, $0 \le k < r$ ja $0 \le l < s$ käyvät läpi täsmalleen luvut $0, 1, 2, \dots, n-1$.

Kirjoitetaan binomikaavan avulla $(jrs + ks + l + 1)^2$ muotoon $f(j, k) + g(k, l) + h(l, j)$ (näin voidaan tehdä useammallakin tavalla) ja sijoitetaan näin valitut funktion yhtälöön (4). Edellä tehdyt huomiot takaavat, että

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi it/n} m_t^2 = 0,$$

missä $m_0, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ ovat luvut $1, 2, \dots n$ jossain järjestyksessä.

Tulkitaan kompleksiluvut tuttuun tapaan geometrisesti ja muodostetaan murtoviiva, jonka perättäisinä sivuina ovat kompleksiluvut m_0^2, $m_1^2e^{2\pi i/n}$, $m_2^2e^{2\pi i\cdot 2/n}$, $\dots$, $m_{n-1}^2e^{2\pi i(n-1)/n}$. Tällöin murtoviivan perättäisten sivujen välinen kulma on sama ja murtoviiva on suljettu. On vielä osoitettava, että murtoviiva sijaitsee toisessa niistä puolitasoista, jotka sen mielivaltainen sivu määrää. Tarkastellaan esimerkiksi sivua m_0. Voidaan olettaa, että se sijaitsee positiivisella reaaliakselilla. Kompleksiluvuilla $m_t^2e^{2\pi it/n}$, $0 < t \le [n/2]$ on positiivinen imaginaariosa $m_t^2\sin(2\pi t/n)$, joten vastaava monikulmion osa sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Jäljelle jäävä osa monikulmioa voidaan ajatella konstruoiduksi niin, että vektorit $-m_te^{2\pi it/n}$, $t = n-1, n-2, \dots, [n/2]+1$, asetetaan tässä järjestyksessä perätysten niin, että ensimmäisen alkupiste on origossa. Kuten edellä, nähdään, että tämäkin osa monikulmioa on ylemmässä puolitasossa. Todistus on vastaava muiden sivujen osalta.

Alkuperäinen tehtävä on tullut ratkaistuksi, sillä $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$.